Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dr. M. Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Mathematik I

– Blatt 2 –

Abgabe: Freitag, den 05.11.2010, 10:10 Uhr, HG 4

Die mit einem $*$ gekennzeichneten Aufgaben sind mündlich vorzubereiten.

2.1.*

Wahr oder falsch?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ ist injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv.

b) $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \#\{p \in \mathbb{N} \,|\, p \text{ prim}, \ p \leqslant x\}$ ist injektiv.

c) $\sin \circ \operatorname{sq} = \operatorname{sq} \circ \sin$.

d) $\#\{1,2,3\}^{\{1,2\}} = 9$.

2.2.

Seien $X_1, \dots, X_n$ Teilmengen der Menge X mit folgenden Eigenschaften:

(1) $X_i \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, n$

(2) $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$

(3) $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$

Für $x, y \in X$ sei $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $x, y \in X_i$.

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und bestimme die Äquivalenzklasse $[x]$ und den Quotienten $X/{\sim}$.

2.3.

Bestimme das additive bzw. multiplikative Inverse von $[3]$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

bitte wenden!

2.4.

Der ISBN-Code (International Standard Book Number) besteht aus 10-Tupeln natürlicher Zahlen $(a_1, \dots, a_{10})$, so dass

$$10 \cdot a_1 + 9 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_{10} \equiv 0 \mod 11$$

ist. Die ersten neun Ziffern variieren dabei zwischen 0 und 9, die „Kontrollziffer" a_{10} zwischen 0 und 10. (Anstelle von 10 wird allerdings X gedruckt.) Beispielsweise hat die englische Ausgabe des Buches von Jänich über Lineare Algebra die ISBN-Nummer

$$0 - 387 - 94128 - 2,$$

während die deutsche Version die ISBN-Nummer

$$3 - 540 - 94128 - 2$$

hat. Die erste Ziffer codiert die Sprache, der Rest Verlag, Autor und Titel.

Und nun zur Aufgabe: Sei $(a_1, \dots, a_{10}) \in \text{ISBN}$, $(b_1, \dots, b_{10}) \in \mathbb{N}^{10}$, so dass

$$\begin{array}{ll} (1) & 0 \leqslant b_1, \dots, b_9 \leqslant 9 \\ (2) & 0 \leqslant b_{10} \leqslant 10 \end{array}$$

a) Zeige: Ist $a_i = b_i$ bis auf einen Index j, so ist $(b_1, \dots, b_{10}) \notin \text{ISBN}$. („Der Code erkennt eine Fehlstelle.")

b) Zeige: Ist $j \neq k$, $a_j \neq a_k$, $a_j = b_k$, $a_k = b_j$ und $a_i = b_i$ für die restlichen Indizes, so ist $(b_1, \dots, b_{10}) \notin \text{ISBN}$. („Der Code erkennt Dreher, die häufigsten Fehler.")

c) Das 10-Tupel

$$0\,6\,6\,9\,0\,3\,9\,2\,5\,4$$

gehe aus einer ISBN-Nummer durch Vertauschen zweier benachbarter Stellen hervor, wobei weder die erste noch die letzte Ziffer involviert ist.

Wie lautet die ursprüngliche ISBN-Nummer?