Mathematik I WiSe 2010/2011 — Lösung Blatt 3

3.2. $S_n := \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv}\}$.

Beh.: $\# S_n = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Beweis: Zeigen allgemeiner:

Sind $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden, so ist

$$\# \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{a_1, \dots, a_n\} \text{ bijektiv}\} = n!$$

Mit $\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, \dots, n\}$ folgt dann die Behauptung.

Beweis durch Induktion nach n:

Sei $I := \{ \underset{n \geq 1}{n \in \mathbb{N},} \mid \# \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{a_1, \dots, a_n\} \text{ bijektiv}\} = n!$ für alle paarweise verschiedenen $a_1, \dots, a_n \}$.

Induktionsanfang: $1 \in I$:

$$\{\sigma : \{1\} \to \{a_1\} \text{ bijektiv}\} = \{\sigma_0\}$$

mit $\sigma_0 : \{1\} \to \{a_1\}$, $1 \mapsto a_1$

$\Rightarrow \# = 1 = 1! \Rightarrow 1 \in I$.

Induktionsschritt: $1 \leq n \in I \Rightarrow n+1 \in I$:

$$\{\sigma : \{1, \dots, n+1\} \to \{a_1, \dots, a_{n+1}\} \text{ bijektiv}\} = \dot{\bigcup_{k=1}^{n+1}} A_k$$

mit $A_k := \{\sigma : \{1, \dots, n+1\} \to \{a_1, \dots, a_{n+1}\} \text{ bijektiv}, \sigma(n+1) = a_k\}$

$$\Rightarrow \# = \sum_{k=1}^{n+1} \# A_k$$

Für jedes $k \in \{1, \dots, n+1\}$ ist

$$\varphi : A_k \to \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{a_1, \dots, a_{n+1}\} \setminus \{a_k\} \text{ bijektiv}\}$$

$$\sigma \mapsto \sigma|_{\{1, \dots, n\}}$$

bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\big(\psi(\sigma)\big)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & , \text{ falls } i \in \{1, \dots, n\}, \\ a_k & , \text{ falls } i = n+1. \end{cases}$$

Es folgt

$$\# A_k = \# \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \underbrace{\{a_1, \dots, a_{n+1}\} \setminus \{a_k\}}_{\# = n} \text{ bijektiv}\}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n \in I}}{=} n!$$

$$\Rightarrow \# \{\sigma : \{1, \dots, n+1\} \to \{a_1, \dots, a_{n+1}\} \text{ bijektiv}\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1) \cdot n! = (n+1)! \Rightarrow n+1 \in I.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$ und es folgt die Behauptung.

3.3. Für $(x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \sim (a,b) :\Longleftrightarrow x^2+y^2 = a^2+b^2.$$

Beh.: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$.

Beweis:

- Reflexivität: Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$x^2+y^2 = x^2+y^2 \Rightarrow (x,y) \sim (x,y).$$

- Symmetrie: Sind $(x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \sim (a,b)$, so gilt:

$$x^2+y^2 = a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2 = x^2+y^2$$
$$\Rightarrow (a,b) \sim (x,y).$$

- Transitivität: Sind $(x,y), (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \sim (a,b)$ und $(a,b) \sim (c,d)$, so gilt:

$$x^2+y^2 = a^2+b^2, \qquad a^2+b^2 = c^2+d^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2 = c^2+d^2 \Rightarrow (x,y) \sim (c,d).$$

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$.

Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei $r := \sqrt{x^2+y^2} \in \overline{\mathbb{R}_+}$ der Radius des Kreises um $(0,0)$ durch (x,y).

(Für $(x,y) = (0,0)$ ist dies ein Punkt.)

Dann ist

$$\begin{aligned}[(x,y)] &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) \sim (x,y)\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2 = x^2+y^2\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{a^2+b^2} = r\}\end{aligned}$$

der Kreis um $(0,0)$ mit Radius r.

<u>Bek.:</u>

$$\varphi : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$$

$$[(x,y)] \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$$

ist eine Bijektion.

<u>Beweis:</u>

- Wohldefiniertheit: Für $(x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $[(x,y)] = [(a,b)]$ gilt $(x,y) \sim (a,b) \Rightarrow x^2+y^2 = a^2+b^2$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$
- Bijektivität: Mit
$$\psi : \overline{\mathbb{R}_+} \longrightarrow \mathbb{R}^2/\sim$$
$$r \longmapsto [(r,0)]$$
gilt:
$$\psi(\varphi([(x,y)])) = \psi(\sqrt{x^2+y^2}) = [(\sqrt{x^2+y^2}, 0)]$$
$$= [(x,y)],$$
da $\sqrt{x^2+y^2}^2 + 0^2 = x^2+y^2$,

und

$$\varphi(\psi(r)) = \varphi\left([(r,0)]\right) = \sqrt{r^2+0^2} = r,$$

d.h. $\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^2/\sim}$ und $\varphi \circ \psi = id_{\overline{\mathbb{R}_+}}$,

d.h. φ ist bijektiv.

(Alternative: Definiere

$$\varphi([(x,y)]) := x^2 + y^2.)$$

3.4.

a) $[2]x + [3] = [5]$

$$\Leftrightarrow \quad x = ([5]-[3]) \cdot [2]^{-1}$$
$$= [5-3] \cdot [2]^{-1}$$
$$= [2] \cdot [2]^{-1}$$
$$= [1].$$

b) $[4]x = [3]$

$$\Leftrightarrow \quad x = [3] \cdot [4]^{-1}$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ [4]\cdot[2] \\ = [8] = [1]}}{=} [3] \cdot [2] = [3 \cdot 2] = [6]$$

c) $x^2 + [5]x + [6] = [0]$

$$\Leftrightarrow [0] = x^2 + ([2]+[3])x + [2]\cdot[3]$$
$$= (x+[2]) \cdot (x+[3])$$

$\underset{\substack{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\ \text{Körper}}}{\Longleftrightarrow}$ $x + [2] = [0]$ oder $x + [3] = [0]$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$x = -[2] = [5]$ $x = -[3] = [4]$.