Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dr. M. Stemmler

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Mathematik I

– Blatt 3 –

Abgabe: Freitag, den 12.11.2010, 10:10 Uhr, HG 4

Die mit einem $*$ gekennzeichneten Aufgaben sind mündlich vorzubereiten.

3.1.*

Zeige:

a) $n^2 \equiv 1 \mod 8$ für alle ungeraden $n \in \mathbb{Z}$,

b) $n^3 \equiv n \mod 6$ für alle $n \in \mathbb{Z}$,

c) $\left\{a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q},\ \text{nicht beide } 0\right\}$
ist eine Gruppe unter der gewöhnlichen Multiplikation.

3.2.

Sei $S_n = \mathrm{Aut}\{1, \dots, n\}$ die Gruppe der Permutationen der Ziffern von 1 bis n.

Zeige: $\#\,\mathrm{Aut}\{1, \dots, n\} = n!$.

3.3.

Für (x, y), $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$(x, y) \sim (a, b) :\Longleftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Was ist die Äquivalenzklasse $[(x, y)]$ eines Punktes?

Gibt es eine Bijektion des Quotienten $\mathbb{R}^2/\sim$ auf

$$\overline{\mathbb{R}}_+ := \{r \in \mathbb{R} \,|\, r \geqslant 0\}?$$

(Welche Zahl $r \geqslant 0$ lässt sich sinnvollerweise $[(x, y)]$ zuordnen?)

3.4.

Löse in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ die Gleichungen

a) $[2]x + [3] = [5]$,

b) $[4]x = [3]$,

c) $x^2 + [5]x + [6] = [0]$.