Mathematik I WiSe 2010/2011 — Lösung Blatt 5

5.2. V Vektorraum über Körper $\mathbb{F}$, $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V.

<u>Beh.:</u> $\mathcal{C} := (c_1, \dots, c_n)$ mit $c_k := \sum_{i=1}^{k} b_i$ Basis von V.

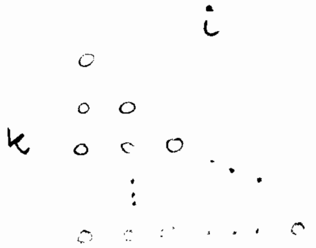
<u>Beweis:</u> Zeigen lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{C}$:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k = 0.$$

Es folgt:

$$0 \underset{\text{Def. } c_k}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \lambda_k b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=i}^{n} \lambda_k \Big) b_i$$ (nachdenken: 

).

Aus der linearen Unabhängigkeit der $b_1, \dots, b_n$ folgt:

$$\sum_{k=i}^{n} \lambda_k = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Mit $i = n$ folgt $\lambda_n = 0$, mit $i = n-1$ folgt $\lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_{n-1} = 0$, usw., also $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, d.h. $\mathcal{C}$ ist linear unabhängig.

Nach Vorlesung existiert eine Basis $\mathcal{C}'$ von V mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$.

Andererseits gilt $\# \mathcal{C}' \underset{\text{VL}}{\overset{\uparrow}{=}} \# \mathcal{B} = n = \# \mathcal{C}$,

d.h. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, so dass $\mathcal{C}$ eine Basis von V ist.

5.3. $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2,\ x_2 = 5x_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

Bch.: U Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim U = 1$.

Beweis: Es ist

$$U = U_1 \cap U_2$$

mit $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\} = \mathbb{L}_{(1,-1,0)}$,

$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 5x_3\} = \mathbb{L}_{(0,1,-5)}$.

Nach Vorlesung ist für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Menge $\mathbb{L}_A \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Dies gilt also insbesondere für U_1 und U_2 und nach Vorlesung auch für ihren Durchschnitt U.

Weiter gilt:

$$\dim(U_1 \cap U_2) \overset{\text{VL}}{=} \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2).$$

Nach Aufgabe 4.4. existieren $2 = 3-1$ linear unabhängige Vektoren in U_1 $\Rightarrow$ $\dim U_1 \geq 2$. Wegen (z.B.) $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3 \setminus U_1$ ist $\dim U_1 < \dim \mathbb{R}^3 = 3$, also $\dim U_1 = 2$.

Genauso gilt auch $\dim U_2 = 2$.

Weiter ist $U_1 \subsetneq U_1 + U_2$ (wg. z.B. $(0,5,1) \in (U_1 + U_2) \setminus U_1$)

$\Rightarrow$ $2 = \dim U_1 < \dim(U_1 + U_2) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\Rightarrow$ $\dim(U_1 + U_2) = 3$.

Schließlich folgt: $\dim U = 2 + 2 - 3 = 1$.

⌜ alternativ: $U = \{(5x_3, 5x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \{x_3 (5,5,1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(5,5,1)}_{\neq 0 \Rightarrow \text{lin. unabh.}} \rangle$ Untervektorraum

$\Rightarrow$ $(5,5,1)$ Basis von U $\Rightarrow$ $\dim U = 1$. ⌟

5.4. $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ Polynom, $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(t_0) = 0$.

<u>Beh.:</u> $\exists\, b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$, $b_{n-1} \neq 0$, so dass mit $q(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i t^i$ gilt: $p(t) = (t - t_0)\, q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis:</u> Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$p(t) \underset{\substack{\uparrow \\ p(t_0)=0}}{=} p(t) - p(t_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def } p}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k - \sum_{k=0}^{n} a_k t_0^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (t^k - t_0^k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aufg. 1.2.(1)}}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (t - t_0) \sum_{i=0}^{k-1} t_0^{k-1-i} t^i$$

$$= (t - t_0) \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} a_k t_0^{k-1-i} t^i$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wie oben}}}{=} (t - t_0) \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k t_0^{k-1-i} \right) t^i = (t - t_0) \sum_{i=0}^{n-1} b_i t^i$$

mit $b_i := \sum_{k=i+1}^{n} a_k t_0^{k-1-i}$,

wobei $b_{n-1} = a_n \neq 0$.

<u>Beh.:</u> Ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 0$, hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$.

<u>Beweis:</u> Induktion nach n:

Sei $I := \{ n \in \mathbb{N} \mid$ Jedes Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ mit $a_n \neq 0$ hat höchstens n Nullstellen $\}$.

Induktionsanfang: $0 \in I$:

$p(t) = \sum_{k=0}^{0} a_k t^k = a_0$ mit $a_0 \neq 0$ hat keine, also 0, Nullstellen

$\implies 0 \in I$.

Induktionsschritt: $n \in I \Rightarrow n+1 \in I$:

Sei $p(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k t^k$ mit $a_{n+1} \neq 0$. Fallunterscheidung:

1. Fall: p hat keine Nullstelle:

Dann hat p insbesondere höchstens $n+1$ Nullstellen.

2. Fall: p hat eine Nullstelle, etwa $p(t_0) = 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$:

Wie oben gezeigt existiert dann ein Polynom $q(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i$ mit $b_n \neq 0$ und $p(t) = (t - t_0) q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Nun gilt

$$p(t) = 0 \iff t = t_0 \text{ oder } q(t) = 0,$$

d.h. p hat höchstens eine Nullstelle mehr als q.

$n \in I \Rightarrow q$ hat höchstens n Nullstellen

$\Rightarrow p$ hat höchstens $n+1$ Nullstellen.

Also gilt $n+1 \in I$.

Nach dem Induktionsprinzip folgt $I = \mathbb{N}$ und damit die Behauptung.

Beh.: Die Polynome $t \mapsto t^n$, $n \geq 0$, sind linear unabhängig.

Beweis: Gegeben sei eine endliche Linearkombination der 0 aus den Polynomen t^n, $n \geq 0$. Indem wir gegebenenfalls 0-Koeffizienten ergänzen, bekommen wir:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{N} \lambda_k t^k}_{=: p(t)} = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda_0, \dots \lambda_N \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Angenommen, es wären nicht alle $\lambda_k = 0$. Dann sei N so gewählt, dass $\lambda_N \neq 0$ ist. Wie oben gezeigt hat p dann höchstens N Nullstellen. Andererseits hat p nach $(*)$ unendlich viele Nullstellen, nämlich alle $t \in \mathbb{R}$, Widerspruch!

Es folgt $\lambda_0 = \dots = \lambda_N = 0$, d.h. die $t \mapsto t^n$, $n \geq 0$, sind linear unabhängig.