

## Übungen zur Mathematik I

– Blatt 5 –

Abgabe: Freitag, den 26.11.2010, 10:10 Uhr, HG 4

Die mit einem \* gekennzeichneten Aufgaben sind mündlich vorzubereiten.

### 5.1.\*

Richtig oder falsch?

- a) Eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraumes ist ein maximales linear unabhängiges System.
- b) Eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraumes ist ein maximales erzeugendes System.
- c)  $W := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$  ist ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- d) Es gibt eine  $2 \times 2$ -Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , so dass  $A \neq 0$  und

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{L}_A.$$

### 5.2.

Zeige: Ist  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis des Vektorraumes  $V$ , so ist auch

$$\begin{aligned} & b_1 \\ & b_2 + b_1 \\ & b_3 + b_2 + b_1 \\ & \vdots \\ & b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 \end{aligned}$$

eine Basis von  $V$ .

### 5.3.

Zeige, dass

$$U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2, x_2 = 5x_3\}$$

ein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^3$  ist, und berechne  $\dim U$ .

(Hinweis:  $U$  ist der Durchschnitt zweier Unterräume  $U_{1/2}$ . Welcher?)

bitte wenden!

#### 5.4.

Sei

$$t \mapsto p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  vom Grade  $\text{grad } p = n \geq 1$ , d. h.  $a_n \neq 0$ , und  $t_0$  eine Nullstelle von  $p$ , d. h.  $p(t_0) = 0$ .

Zeige: Es gibt ein Polynom

$$q(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_{n-1}t^{n-1}$$

vom Grade  $\text{grad } q = n - 1$ , so dass

$$p(t) = (t - t_0)q(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

(*Hinweis:* Betrachte  $p(t) - p(t_0)$  und verwende Übungsaufgabe 1.2. (1).)

Wieviele Nullstellen hat ein Polynom mit reellen Koeffizienten höchstens?

Folgere, dass die Polynome

$$t \mapsto t^n, \quad n \geq 0,$$

linear unabhängig sind.