Mathematik I WiSe 2010/2011 — Lösung Blatt 6

6.2. V Vektorraum über $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p prim,

$\dim_{\mathbb{F}} V = n$.

<u>Beh.:</u> $\# V = p^n$.

<u>Beweis:</u> $\dim_{\mathbb{F}} V = n \implies$ Es existiert eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V. Definiere die Abbildung

$$\phi : \mathbb{F}^n \longrightarrow V$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i .$$

Dann gilt:

- ϕ ist injektiv, denn für $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\lambda_1', \ldots, \lambda_n') \in \mathbb{F}^n$ mit $\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \phi(\lambda_1', \ldots, \lambda_n')$ gilt:

$$0 = \phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \phi(\lambda_1', \ldots, \lambda_n')$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i') b_i$$
$$\overset{b_1, \ldots, b_n}{\underset{\text{lin. unabh.}}{\Longrightarrow}} \forall i = 1, \ldots, n : \lambda_i - \lambda_i' = 0$$
$$\Longrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1', \ldots, \lambda_n').$$

• ϕ ist surjektiv, denn für jedes $v \in V$ gilt:

$b_1, \dots, b_n$ erzeugend

$\Longrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$

$\Longrightarrow v = \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Insgesamt ist $\phi : \mathbb{F}^n \to V$ bijektiv. Es folgt:

$$\# V = \#(\mathbb{F}^n) = (\underbrace{\# \mathbb{F}}_{= \#(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p})^n = p^n.$$

<u>Beh.:</u> Mit dem ISBN-Code lassen sich höchstens 11^9 Bücher codieren.

<u>Beweis:</u> Die Menge ISBN der gültigen ISBNs lässt sich identifizieren mit dem $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$-Vektorraum

$$V = \left\{ (a_1, \dots, a_{10}) \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^{10} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{10} [11-i] a_i = [0] \right\}$$

$$= \mathbb{L}_A \subset (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^{10} \text{ mit } A = ([10], \dots, [1]) \in (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^{1 \times 10}.$$

Nach Aufgabe 4.4. gilt

$$\dim V \geq 10 - 1 = 9$$

und wegen $A \neq 0$ sogar $\dim V = 9$.

Aus obiger Überlegung folgt dann $\# V = 11^9$.

Es lassen sich also höchstens 11^9 Bücher codieren.

(Warum sind es in Wirklichkeit <u>weniger</u> als 11^9?)

6.3. $\mathbb{F}$ Körper, $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $m, n \geq 1$.

<u>Beh.:</u> $\dim \mathbb{L}_A \geq n-m$.

<u>Beweis:</u> Ist $m \geq n$, so gilt trivialerweise

$\dim \mathbb{L}_A \geq 0 \geq n-m$.

Sei also im Folgenden $m < n$.

Induktion nach m:

Sei $I := \{ m \geq 1 \mid$ Für jedes $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mit $m<n$ gilt $\dim \mathbb{L}_A \geq n-m \}$.

<u>Induktionsanfang:</u> $1 \in I$: Sei $A \in \mathbb{F}^{1 \times n}$ mit $n > 1$.

<u>1. Fall:</u> $A = 0$: Dann ist $\mathbb{L}_A = \mathbb{F}^n \Rightarrow \dim \mathbb{L}_A = n \geq n-1$.

<u>2. Fall:</u> $A \neq 0$: Dann gilt nach Aufgabe 4.4., dass

$\dim \mathbb{L}_A \geq n-1$.

Also gilt $1 \in I$.

<u>Induktionsschritt:</u> $1 \leq m \in I \Rightarrow m+1 \in I$:

Sei $A \in \mathbb{F}^{(m+1) \times n}$ mit $n > m+1$.

<u>1. Fall:</u> $A = 0$: Dann ist $\mathbb{L}_A = \mathbb{F}^n \Rightarrow \dim \mathbb{L}_A = n \geq n-(m+1)$.

<u>2. Fall:</u> $A \neq 0$: Wie im Beweis des Fundamentallemmas kann o. B. d. A. angenommen werden, dass

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots\cdots a_n \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_1 \neq 0, \ \tilde{A} \in \mathbb{F}^{m \times (n-1)}.$$

Wegen $m+1 < n \Rightarrow m < n-1$ folgt aus $m \in I$, dass

$$\dim \mathbb{L}_{\tilde{A}} \geq (n-1)-m = n-(m+1) =: N.$$

(Beachte: $\mathbb{L}_{\tilde{A}} \subset \mathbb{F}^{n-1}$.)

Wähle N linear unabhängige Vektoren $\tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(N)} \in \mathbb{L}_{\tilde{A}}$.

Schreibe $\tilde{x}^{(i)} = (x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ für $i = 1, \dots, N$

und setze jeweils $x_1^{(i)} := -a_1^{-1} \sum_{j=2}^{n} a_j x_j^{(i)}$.

Wie im Beweis des Fundamentallemmas gilt dann

$$x^{(i)} := (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in \mathbb{L}_A \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Die $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ sind linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x^{(i)} = 0 \in \mathbb{F}^n \qquad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{F}$$

folgt durch Weglassen der ersten Koordinate:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \tilde{x}^{(i)} = 0 \in \mathbb{F}^{n-1}$$

und mit der linearen Unabhängigkeit der $\tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(N)}$

schließlich $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$.

Es folgt $\dim \mathbb{L}_A \geq N = n-(m+1) \Rightarrow m+1 \in I$.

Nach dem Induktionsprinzip gilt $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$,

woraus die Behauptung folgt.

(Bemerkung: Das Fundamentallemma ist ein Spezialfall dieser Aussage:

Ist $m < n$, so folgt $\dim \mathbb{L}_A \geq n-m > 0$

und damit $\mathbb{L}_A \neq (0)$, d.h. es existiert eine nicht-triviale

Lösung von $A \cdot x = 0$.)

6.4.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

ges.: Zerlegung von $f_1 := g + \sin + sq$ und $f_2(x) := 2x^3 + x^2 + 1$ in geraden und ungeraden Anteil.

Zu f_1: Es gilt

$$g(-x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } -x \leq 0, \\ -x, & \text{falls } -x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \leq 0, \\ 0, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Damit folgt

$$g(x) + g(-x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases} = |x|,$$

$$g(x) - g(-x) = x.$$

Der gerade Anteil von f_1 ist also

$$f_{1,\text{gerade}}(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_1(-x))$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(g(x) + g(-x))}_{= |x|} + \underbrace{\frac{1}{2}(\sin(x) + \underbrace{\sin(-x)}_{= -\sin(x)})}_{= 0} + \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + \underbrace{(-x)^2}_{= x^2})}_{= x^2}$$

$$= \frac{1}{2}|x| + x^2.$$

Der ungerade Anteil von f_1 ist

$$f_{1,\text{ungerade}}(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) - f_1(-x))$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{g(x) - g(-x)}_{= x}) + \underbrace{\frac{1}{2}(\sin(x) - \underbrace{\sin(-x)}_{= -\sin(x)})}_{= \sin(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 - \underbrace{(-x)^2}_{= x^2})}_{= 0}$$

$$= \frac{1}{2}x + \sin(x).$$

Zu f_2: Der gerade Anteil ist

$$f_{2,\text{gerade}}(x) = \frac{1}{2}\left(f_2(x) + f_2(-x)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(2x^3 + \underbrace{2(-x)^3}_{=-2x^3}\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2 + \underbrace{(-x)^2}_{=x^2}\right)}_{=x^2} + \underbrace{\frac{1}{2}(1+1)}_{=1}$$

$$= x^2 + 1.$$

Der ungerade Anteil ist

$$f_{2,\text{ungerade}}(x) = \frac{1}{2}\left(f_2(x) - f_2(-x)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(2x^3 - \underbrace{2(-x)^3}_{=-2x^3}\right)}_{=2x^3} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2 - \underbrace{(-x)^2}_{=x^2}\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}(1-1)}_{=0}$$

$$= 2x^3.$$