

Mathematik I WiSe 2010/2011 - Lösung Blatt 7

7.2. $D: P_n \rightarrow P_{n-1}$, $p \mapsto p'$ Ableitung.

a) ges.: Matrix $M_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n-1}}(D)$ von D bzgl. der Basen

$$\mathcal{B}_n = (1, t, t^2, \dots, t^n) \text{ und } \mathcal{B}_{n-1} = (1, t, t^2, \dots, t^{n-1}).$$

Es gilt:

$$D(1) = 0, \quad D(t) = 1, \quad D(t^2) = 2t, \quad D(t^3) = 3t^2 \text{ usw.}$$

Allgemein gilt für $j = 0, 1, \dots, n$:

$$D(t^j) = j t^{j-1} = 0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot t^{j-2} + j \cdot t^{j-1} + 0 \cdot t^j + \dots + 0 \cdot t^{n-1}.$$

Wir erhalten:

$$M_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n-1}}(D) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ 0 & & & & 0 & n \end{pmatrix}}_{(n+1) \text{ Spalten}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ 0 & & & & 0 & n \end{pmatrix}} \right\} n \text{ Zeilen}$$

$\mathbb{R}^{n \times (n+1)}$

b) ges.: Matrix $M_{\tilde{\mathcal{B}}_n, \mathcal{B}_{n-1}}(D)$ von D bzgl. der Basen

$$\tilde{\mathcal{B}}_n = (1, 1+t, (1+t)^2, \dots, (1+t)^n) \text{ und } \mathcal{B}_{n-1}.$$

Es gilt:

$$D(1) = 0, \quad D(1+t) = 1, \quad D((1+t)^2) = 2+2t, \quad D((1+t)^3) = 3+6t+3t^2 \text{ usw.}$$

Allgemein gilt für $j = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} D((1+t)^j) &= j(1+t)^{j-1} = j \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} 1^{j-1-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} j \binom{j-1}{k} t^k \quad \left(+ \sum_{k=j}^{n-1} 0 \cdot t^k \right) \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$M_{\tilde{\mathcal{E}}_n, \mathcal{E}_{u-1}}(j) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ & 0 & 2 & 6 & & \vdots \\ & & 0 & 3 & & \vdots \\ & & & 0 & & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & n-1 & n(u-1) \\ & & & & & 0 & n \end{pmatrix}}_{(n+1) \text{ Spalten}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ & 0 & 2 & 6 & & \vdots \\ & & 0 & 3 & & \vdots \\ & & & 0 & & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & n-1 & n(u-1) \\ & & & & & 0 & n \end{pmatrix}} \right\} n \text{ Zeilen}$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}^{n \times (n+1)}$

$$7.3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

ges.: $\text{rg } A$, $\dim \mathbb{L}_A$, Basis von $\mathbb{L}_A$, $\mathbb{L}_{A,b}$.

Gauß-Algorithmus:

$$(A | b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 17 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \cdot (-1) \\ \xleftarrow{+} \cdot (-3) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \cdot (-1/2) \\ \xleftarrow{+} \cdot 4 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \cdot (-2) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rg } A = \#(\text{Zeilen} \neq 0) = 2,$$

$$\dim \mathbb{L}_A = \#(\text{Spalten von } A) - \text{rg } A = 5 - 2 = 3,$$

$$\text{Basis von } \mathbb{L}_A: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{L}_{A,b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{L}_A.$$

7.4. $\Theta(\varphi) =$ Drehung des $\mathbb{R}^2$ um $(0,0)$ gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel φ ,

$M(\Theta(\varphi)) =$ Matrix von $\Theta(\varphi)$ bzgl. Basis $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$.

a) Beh.: $M(\Theta(\varphi+\psi)) = M(\Theta(\varphi)) \cdot M(\Theta(\psi))$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 M(\Theta(\varphi)) \cdot M(\Theta(\psi)) &\stackrel{\text{VL}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Add. Theorem}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) & -(\cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi)) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi) & -\sin(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\varphi)\cos(\psi) \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Add. Theorem}}{\downarrow} \stackrel{\text{VL}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} \stackrel{\text{VL}}{=} M(\Theta(\varphi+\psi)).
 \end{aligned}$$

(anschaulich: $M(\Theta(\varphi+\psi))$)

$= M(\text{Drehung um Winkel } \varphi+\psi)$

$\stackrel{\uparrow}{=} M((\text{Drehung um Winkel } \varphi) \circ (\text{Drehung um Winkel } \psi))$

Anschauung

$\stackrel{\uparrow}{=} M(\text{Drehung um Winkel } \varphi) \cdot M(\text{Drehung um Winkel } \psi)$

$\stackrel{\text{VL}}{=} M(\Theta(\varphi)) \cdot M(\Theta(\psi)).$

b) $\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -linear, $M(\alpha) =$ Matrix von α bzgl.

$\mathbb{R}$ -Basis $1, i$ von $\mathbb{C}$.

Beh.: α $\mathbb{C}$ -linear $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}: M(\alpha) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Beweis: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, d.h.

α $\mathbb{C}$ -linear $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{C}^{1 \times 1} \forall z \in \mathbb{C}: \alpha(z) = A \cdot z$

$A = (a) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C}: \alpha(z) = \lambda \cdot z$

$\lambda = (a, b) \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{C}: \alpha(z) = (a, b) \cdot z$

$z = (x, y) \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \forall x, y \in \mathbb{R}: \alpha(x, y) = (a, b) \cdot (x, y)$

$\stackrel{\uparrow}{=} (ax - by, ay + bx)$
Mult. in $\mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : M(\alpha) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Geometrische Beschreibung: Sei o. z. d. A. $(a, b) \neq (0, 0)$.

Setze $r := \sqrt{a^2 + b^2} > 0$.

$$\text{Gilt } \left|\frac{a}{r}\right|^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{a}{r} \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \exists \varphi \in [0, \pi] : \frac{a}{r} = \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow |\sin(\varphi)| = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} = \frac{|b|}{r}$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{\pm b}{r}.$$

Falls $\sin(\varphi) = \frac{-b}{r}$: Ersetze $\varphi \mapsto -\varphi$

$$\Rightarrow \cos(-\varphi) = \cos(\varphi) = \frac{a}{r},$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi) = \frac{b}{r}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Streckung,} \\ \text{Faktor } r}} \cdot \underbrace{M(\theta(\varphi))}_{\substack{\text{Drehung,} \\ \text{Winkel } \varphi}}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

α ist eine „Drehstreckung“ mit Streckfaktor r und Drehwinkel φ .