

Übungen zur Mathematik I

– Blatt 7 –

Abgabe: Freitag, den 17.12.2010, 10:10 Uhr, HG 4

Die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben sind mündlich vorzubereiten.

7.1.*

Wahr oder falsch?

Seien $\alpha, \alpha_1 : V \rightarrow V'$ und $\beta : V' \rightarrow V''$ lineare Abbildungen endlich-dimensionaler Vektorräume über dem Körper $\mathbb{F}$.

- a) $\text{rg}(\alpha) \leq \text{Minimum} \{ \dim V, \dim V' \}$.
- b) $\text{rg}(\alpha + \alpha_1) = \text{rg}(\alpha) + \text{rg}(\alpha_1)$.
- c) $\text{rg}(\alpha + \alpha_1) \leq \text{rg}(\alpha) + \text{rg}(\alpha_1)$.
- d) $\text{rg}(\beta \circ \alpha) = \text{rg}(\beta)$.

7.2.

Bestimme die Matrix der Ableitung

$$\mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}, \quad p \longmapsto p',$$

bezüglich der beiden Basen

- a) $1, t, t^2, \dots, t^n$ und $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ bzw.
- b) $1, 1+t, (1+t)^2, \dots, (1+t)^n$ und $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$.

7.3.

Bestimme $\text{rg } A$ und $\dim \mathbb{L}_A$ für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$$

und gib eine Basis des Lösungsraumes $\mathbb{L}_A$ an.

Löse schließlich das inhomogene Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

bitte wenden!

7.4.

Sei $\Theta(\varphi)$ die Drehung um den Ursprung des $\mathbb{R}^2$ im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ und $M(\Theta(\varphi))$ die Matrix von $\Theta(\varphi)$ bzgl. der kanonischen Basis $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

a) Verifiziere

$$M(\Theta(\varphi + \psi)) = M(\Theta(\varphi)) \cdot M(\Theta(\psi)).$$

b) Sei $M(\alpha)$ die Matrix der $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Zeige: α ist $\mathbb{C}$ -linear genau dann, wenn $M(\alpha)$ die Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

hat.

Kannst Du in diesem Fall die „Wirkung“ von α geometrisch beschreiben?