

Übungen zur Mathematik I

– Blatt 8 (Bonusblatt¹) –

Abgabe: Freitag, den 14.01.2011, 10:10 Uhr, HG 4

Die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben sind mündlich vorzubereiten.

8.1.*

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}$ und $\alpha : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

- a) Zeige: α ist injektiv $\iff \det \alpha \neq 0$.
- b) Zeige: α ist surjektiv $\iff \det \alpha \neq 0$.
- c) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ und

$$A_r := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \quad \text{mit } 1 \leq r \leq n.$$

Zeige: Ist $\det A_r \neq 0$, so gilt $\operatorname{rg} A \geq r$.

- d) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Zeige:

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{\min\{p \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt Transpositionen } \tau_1, \dots, \tau_p \text{ mit } \sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p\}}.$$

8.2.

Löse das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} [1] & [2] & [0] & [1] & [7] \\ [1] & [0] & [0] & [3] & [5] \\ [3] & [2] & [0] & [7] & [17] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [3] \\ [1] \\ [5] \end{pmatrix}$$

- a) über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und
- b) über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(Hinweis: Vergleiche Aufgabe 7.3.)

bitte wenden!

¹Die auf diesem Übungsblatt erreichten Punkte zählen zum Haben, aber nicht zum Soll.

8.3.

Seien (a, b) und (a', b') zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ und Δ das Dreieck

$$\{\lambda(a, b) + \lambda'(a', b') \mid \lambda, \lambda' \geq 0, \lambda + \lambda' \leq 1\}.$$

Zeige: $\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ stimmt mit der aus der Schule bekannten Fläche von Δ (bis auf ein Vorzeichen) überein.

8.4.

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

Wir wünschen euch frohe Weihnachten und ein gutes Jahr 2011!