

Mathematik I WiSe 2010/2011 - Lösung Blatt 9

9.2. ges.: A^{-1} zu $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-1/2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-6) \\ \cdot (-4) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & -1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1/3 \\ \leftarrow + \end{array} \cdot (-7)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & -1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1/3 & -7/3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot (-1/4) \end{array} \cdot (-1)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & -5/12 & 7/36 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 7/36 & -1/4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot 3/2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/24 & 5/12 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 7/36 & -1/4 \end{array} \right) = A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{pmatrix}$$

9.3. geg.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$

ges.: $\det A$ durch Entwicklung nach der 1. Spalte.

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

jeweils Entw. 3. Spalte $\Downarrow$

$$= \left((-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right)$$

$$- 2 \left(0 + 0 + (-1)^{3+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right)$$

$$- \left((-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2 + 4 \cdot (-29) - 2 \cdot 4 \cdot (-17) + 3 - 4 \cdot 1$$

$$= 2 - 116 + 136 + 3 - 4$$

$$= \underline{\underline{21}}.$$

ges.: $\det A$ durch elementare Spalten- und Zeilenumformungen.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \boxed{\cdot (-2)} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \boxed{\cdot 5} \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \boxed{\cdot \frac{1}{4}} \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21}{4} \end{vmatrix}$$

obere
Dreiecks-
matrix

$$\Downarrow$$
$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot \frac{21}{4}$$

$$= \underline{\underline{21}}$$

9.4. geg.: $m, n \geq 1$, F Körper, $B \in F^{n \times n}$, $C \in F^{m \times m}$, $D \in F^{m \times n}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} \in F^{(m+n) \times (m+n)}.$$

Beh.: $\det A = (-1)^{mn} \det B \cdot \det C.$

Beweis: Wissen nach Vorlesung:

$$\det \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det B \cdot \det C,$$

also noch zu zeigen:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Dazu schreibe

$$\begin{pmatrix} 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & - \\ \vdots & \\ -\beta_n & - \end{pmatrix}, \quad \beta_i \in F^{m+n} \text{ Zeilen von } (0 \ B),$$

$$\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & - \\ \vdots & \\ -\gamma_m & - \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in F^{m+n} \text{ Zeilen von } (C \ D).$$

Damit gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\beta_1 & - \\ \vdots & \\ -\beta_n & - \\ -\gamma_1 & - \\ \vdots & \\ -\gamma_m & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ n \text{ Vertauschungen}}}{=} (-1)^n \det \begin{pmatrix} -\gamma_1 & - \\ -\beta_1 & - \\ \vdots & \\ -\beta_n & - \\ -\gamma_2 & - \\ \vdots & \\ -\gamma_m & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \stackrel{\substack{\uparrow \\ n \text{ Vertauschungen}}}{=} ((-1)^n)^2 \det \begin{pmatrix} -\gamma_1 & - \\ -\gamma_2 & - \\ \vdots & \\ -\beta_1 & - \\ -\beta_n & - \\ -\gamma_3 & - \\ \vdots & \\ -\gamma_m & - \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Insges. } m\text{-mal}}}{=} ((-1)^n)^m \det \begin{pmatrix} -\gamma_1 & - \\ \vdots & \\ -\gamma_m & - \\ -\beta_1 & - \\ \vdots & \\ -\beta_n & - \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt die Behauptung.