Mathematik I, WiSe 2010/2011 – Lösung VB zur Klausur

1. Sei V ein K-Vektorraum und $f: V \to V$ Endomorphismus mit $f \circ f = f$. Zeige:

$$V = \text{Bild } f \oplus \text{Kern } f.$$

Beweis:

Zu zeigen: (i) $V = \text{Bild } f + \text{Kern } f$

(ii) $\text{Bild } f \cap \text{Kern } f = \{0\}$

- Zu (i): Sei $v \in V$ beliebig. Wir können v schreiben als

$$v = v - f(v) + \underbrace{f(v)}_{\in \text{Bild } f}.$$

Müssen noch zeigen, dass $v - f(v) \in \text{Kern}(f)$ gilt. Dazu:

$$f(v - f(v)) \underset{f \text{ linear}}{=} f(v) - f(f(v)) \underset{f \circ f = f}{=} f(v) - f(v) = 0$$

$\Rightarrow v - f(v) \in \text{Kern } f$ Also: $v \in \text{Kern } f + \text{Bild } f$.

- Zu (ii): Sei $v \in \text{Bild } f \cap \text{Kern } f$.

$v \in \text{Bild } f \Rightarrow \exists\, w \in V$ mit $f(w) = v$.

$v \in \text{Kern } f \Rightarrow 0 = f(v)$

Also:

$$0 = f(v) = f(f(w)) \underset{f \circ f = f}{=} f(w) = v \qquad \text{d.h. } v = 0.$$

$\Rightarrow \text{Bild } f \cap \text{Kern } f = \{0\}$. ∎

2. Invertiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [2] & -[2] & [1] \\ -[1] & -[2] & [2] \end{pmatrix} \in \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right)^{3\times 3}.$$

<u>Erinnerung:</u> In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gilt:

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

·	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

d.h. insbesondere

$-[1] = [2]$ und

$-[2] = [1]$

<u>Damit:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & [0] & [2] & [1] & [0] & [0] \\ [2] & [1] & [1] & [0] & [1] & [0] \\ [2] & [1] & [2] & [0] & [0] & [1] \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & [0] & [2] & [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] & [1] & [1] & [0] \\ [0] & [1] & [1] & [1] & [0] & [1] \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot([2]) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & [0] & [2] & [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] & [1] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] & [2] & [1] \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & [0] & [0] & [1] & [2] & [1] \\ [0] & [1] & [0] & [1] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] & [2] & [1] \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} [1] & [2] & [1] \\ [1] & [1] & [0] \\ [0] & [2] & [1] \end{pmatrix}}_{= A^{-1}.}$$

Kontrolle:

$$\begin{pmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [2] & [1] & [1] \\ [2] & [1] & [2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [1] & [2] & [1] \\ [1] & [1] & [0] \\ [0] & [2] & [1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [1]+[0]+[0] & [2]+[0]+[1] & [1]+[0]+[2] \\ [2]+[1]+[0] & [1]+[1]+[2] & [2]+[0]+[1] \\ [2]+[1]+[0] & [1]+[1]+[1] & [2]+[0]+[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [1] & [2] & [1] \\ [1] & [1] & [0] \\ [0] & [2] & [1] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [2] & [1] & [1] \\ [2] & [1] & [2] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [1]+[1]+[2] & [0]+[2]+[1] & [2]+[2]+[2] \\ [1]+[2]+[0] & [0]+[1]+[0] & [2]+[1]+[0] \\ [0]+[1]+[2] & [0]+[2]+[1] & [0]+[2]+[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

3. Bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$x^2 + 2x + 2.$$

Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= x^2 + 2x + 1^2 + 1 \\ &= (x+1)^2 + 1 \\ &= (x+1)^2 - i^2 \\ &= (x+1-i)(x+1+i) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Nullstellen sind $-1+i \in \mathbb{C}$ und $-1-i \in \mathbb{C}$. $\blacksquare$

4. Sei $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ und

$$A = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Berechne $\det A$.

Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann:

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} v_1 v_1 u_1 + v_1 v_2 u_2 + v_1 v_3 u_3 \\ v_2 v_1 u_1 + v_2 v_2 u_2 + v_2 v_3 u_3 \\ v_3 v_1 u_1 + v_3 v_2 u_2 + v_3 v_3 u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3)\, v_1 \\ (v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3)\, v_2 \\ (v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3)\, v_3 \end{pmatrix} = \underbrace{(v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3)}_{\in \mathbb{R}} \cdot v$$

d.h. $A \cdot u \in \operatorname{span}\{v\}$.

$\Rightarrow$ $\operatorname{Bild} A \subset \operatorname{span}\{v\}$ also $\dim \operatorname{Bild} A \leq \dim \operatorname{span}\{v\} \leq 1 < 3$.

$\Rightarrow$ A ist nicht surjektiv

$\Rightarrow$ $\det A = 0$.

$\blacksquare$

5. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt. Zeige:

$$\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n .$$

Nach Voraussetzung hat A die n verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit algebraischer Vielfachheit 1 (da $\operatorname{grad} \chi_A = n$). Für die Dimension der Eigenraume folgt:

$$1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq \text{alg. Vielfachheit von } \lambda_i = 1$$

d.h.

$$\dim E_{\lambda_i} = \text{alg. Vielfachheit von } \lambda_i \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

Also ist A diagonalisierbar, d.h. $\exists\ S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit

$$S A S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \det(S A S^{-1})$$

$$= \det(S) \cdot \det(A) \cdot \det(S)^{-1}$$

$$= \frac{\det(S)}{\det(S)} \cdot \det(A)$$

$$= \det A.$$

$\blacksquare$

6. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeige, dass A diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Laplace}}{=} -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda)(-2-\lambda)$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte von A sind $0, 3$ und -2.

$\overset{\text{pw. versch.}}{\Longrightarrow}$ A ist diagonalisierbar.

Eigenräume:

- $$A - 0\cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ + \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ | \cdot \frac{-1}{6} \quad \cdot 2 \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_0 = \operatorname{Kern}(A - 0\cdot E) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

• $A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \\ + \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad E_3 = \operatorname{Kern}(A - 3E) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

• $A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot (-5) \\ + \\ \\ \end{matrix}$

$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot (\frac{2}{4}) \\ + \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad E_{-2} = \operatorname{Kern}(A + 2E) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Nach VL ist $\mathbb{R}^3 = E_0 \oplus E_{-2} \oplus E_3$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

$\blacksquare$

7. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Zeige:

a) 0 ist kein Eigenwert von A.

b) λ ist Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von A^{-1}.

Zu a):

A invertierbar $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$.

$\chi_A(0) = \det(A - 0 \cdot E_n) = \det A \neq 0$.

$\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow}$ 0 ist kein Eigenwert von A.

Zu b):

λ Eigenwert von A

$\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$

$\overset{A \text{ inv. bar}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0$ mit $v = A^{-1}(\lambda v)$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0$ mit $v = \lambda A^{-1} v$

$\overset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0$ mit $\frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$

$\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1}.

$\blacksquare$

8. Sei $\mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 2. Bestimme die Eigenwerte der linearen Abbildung:

$$D: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2, \quad p \longmapsto p' + p''.$$

Begründe, ob D nilpotent ist und gib ggf. den Index an.

Matrixdarstellung $M(D) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bzgl. der Basis $\{1, t, t^2\}$ von $\mathbb{P}_2$:

$$D(1) = 0, \quad D(t) = 1 + 0 = 1, \quad D(t^2) = 2t + 2.$$

Damit folgt:

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_D(\lambda) = \det\big(M(D) - \lambda E\big) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{VL}}{=} (-\lambda)^3 = -\lambda^3$$

$\Rightarrow$ 0 ist der einzige Eigenwert von D.

Nilpotent:

$$M(D)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(D)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D ist nilpotent mit Index 3.

9. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\,|\,)$. Weiter seien $v, w \in V$ und das von v und w aufgespannte Parallelogramm

$$P = \{\lambda v + \mu w \mid 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$$

gegeben. Zeige:

a) P ist ein Rhombus (d.h. v und w gleich lang)
$\Leftrightarrow$ $v+w$ und $v-w$ sind orthogonal

b) P ist ein Rechteck (d.h. v und w sind orthogonal)
$\Leftrightarrow$ $v+w$ und $v-w$ sind gleich lang.

Zu a): Es ist

$$\begin{aligned}(v+w \mid v-w) &= (v \mid v-w) + (w \mid v-w) \\ &= (v \mid v) - (v \mid w) + (w \mid v) - (w \mid w) \\ &= (v \mid v) - (v \mid w) + (v \mid w) - (w \mid w) \\ &= (v \mid v) - (w \mid w) \\ &= \|v\|^2 - \|w\|^2 .\end{aligned}$$

Damit:

$$\|v\| = \|w\| \Leftrightarrow \|v\|^2 = \|w\|^2 \Leftrightarrow \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$$

$$\overset{\text{Rechnung}}{\underset{\text{oben}}{\Leftrightarrow}} (v+w \mid v-w) = 0$$

$$\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (v+w) \perp (v-w)$$

$\Rightarrow$ a) gilt.

Zu b): Es ist

$$\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = (v+w \mid v+w) - (v-w \mid v-w)$$

$$= (v \mid v+w) + (w \mid v+w) - \Big((v \mid v-w) - (w \mid v-w) \Big)$$

$$= (v|v) + (v|w) + (w|v) + (w|w) - \Big((v|v) - (v|w) - (w|v) + (w|w) \Big)$$

$$= (v|v) + (v|w) + (v|w) + (w|w) - (v|v) + (v|w) + (v|w) - (w|w)$$

$$= 4\,(v|w)$$

Damit:

$$v \perp w \overset{\text{Def.}}{\iff} (v|w) = 0 \iff 4(v|w) = 0$$

$$\underset{\text{oben}}{\overset{\text{Rechnung}}{\iff}} \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 0$$

$$\iff \|v+w\|^2 = \|v-w\|^2$$

$$\iff \|v+w\| = \|v-w\|$$

$\Rightarrow$ b) gilt.

$\blacksquare$