Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. F. W. Knöller
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Mathematik I

– Vorbereitungsblatt für die Klausur –

keine Abgabe

1.

Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = f$. Zeige:

$$V = \operatorname{Bild} f \oplus \operatorname{Kern} f$$

2.

Invertiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [2] & -[2] & [1] \\ -[1] & -[2] & [2] \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{3\times 3}.$$

3.

Bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$x^2 + 2x + 2.$$

4.

Sei $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ und

$$A = \begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Berechne $\det A$.

5.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt.
Zeige:

$$\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n\,.$$

Bitte wenden!

6.

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeige, dass A diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

7.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Zeige:

a) 0 ist kein Eigenwert von A.

b) λ ist ein Eigenwert von A, genau dann, wenn $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1} ist.

8.

Es sei $\mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leqslant 2$. Bestimme die Eigenwerte der linearen Abbildung

$$D : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2, \quad p \longmapsto p' + p'',$$

wobei p' die erste und p'' die zweite Ableitung des Polynoms p bezeichne. Begründe, ob D nilpotent ist und gib ggf. den Index an.

9.

Sei V ein euklidischer Vektorraum, d.h. ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren v und w aus V gegeben und P das von v und w aufgespannte Parallelogramm, d.h.

$$P = \{\lambda v + \mu w \,|\, 0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1\}.$$

Zeige:

a) Genau dann ist P ein Rhombus (d.h. v und w sind gleich lang), wenn die Diagonalen $v + w$ und $v - w$ von P orthogonal sind.

b) Genau dann ist P ein Rechteck (d.h. v und w sind orthogonal), wenn die Diagonalen $v + w$ und $v - w$ von P gleich lang sind.

Die Klausur findet statt

am Mittwoch, den 16.02.2011, von 12:30 Uhr bis 15:00 Uhr
in den Hörsälen 5 und 113
im Hörsaalgebäude (Biegenstraße).

Die Verteilung auf die Hörsäle wird dort am Tag der Klausur durch Aushang bekanntgegeben. Zur Klausur sind ein gültiger Studentenausweis und ein gültiger Lichtbildausweis sowie Schreibzeug mitzubringen. Das Papier wird gestellt.

Als Hilfsmittel ist ein <u>handbeschriebenes</u> DIN-A4 Blatt (Vorder- und Rückseite) mit Notizen zur Vorlesung erlaubt.

Wir wünschen viel Erfolg!