Mathematik I WiSe 2010/2011 — Lösung des VB für die EK

1. a) <u>Beh.:</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

<u>Beweis:</u> Induktion nach n:

Sei $I := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \right\}$.

<u>Induktionsanfang:</u> $0 \in I$:

$$\sum_{k=1}^{0} (2k-1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{leere} \\ \text{Summe}}}{=} 0 = 0^2 \implies 0 \in I.$$

<u>Induktionsschritt:</u> $n \in I \implies n+1 \in I$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + \big(2(n+1) - 1\big)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n \in I}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \implies n+1 \in I.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist $I = \mathbb{N}$, woraus die Behauptung folgt.

b) <u>Beh.:</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $n^2 \leq 2^n$.

<u>Beweis:</u> Induktion nach n:

Sei $I := \left\{ n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \;\middle|\; n^2 \leq 2^n \right\}$.

<u>Induktionsanfang:</u> $4 \in I$:

$$4^2 = 16 = 2^4 \implies 4 \in I.$$

<u>Induktionsschritt:</u> $4 \leq n \in I \implies n+1 \in I$:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ 2n \geq 1}}{\leq} n^2 + 2n + 2n = n^2 + 4n \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq 4}}{\leq} n^2 + n^2$$

$$= 2n^2 \overset{\substack{n \in I \\ \downarrow}}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \implies n+1 \in I.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist $I = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq 4 \}$, woraus die Behauptung folgt.

2. Beh.: $(\mathbb{R}, *)$ mit $x * y := 3x + 4y$ ist keine Gruppe.

Beweis: Angenommen, $(\mathbb{R}, *)$ wäre eine Gruppe.

Sei dann $e \in \mathbb{R}$ das neutrale Element.

Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$3x + 4e = x * e = x = e * x = 3e + 4x$$

$$\Rightarrow \quad e = x.$$

Es folgt $\mathbb{R} = \{e\}$, Widerspruch!

Also ist $(\mathbb{R}, *)$ keine Gruppe.

3. a) ges.: Lösungsmenge von $[2]x = [3]$ in $\mathbb{Z}/_{17}\mathbb{Z}$.

Es ist $[2] \cdot [9] = [18] = [1]$, d.h. $[2]^{-1} = [9]$.

Man erhält:

$$[2]x = [3] \iff x = [2]^{-1} \cdot [3] = [9] \cdot [3] = [27] = [10].$$

Die Lösungsmenge ist also $\{[10]\}$.

b) ges.: Lösungsmenge von $(x - [2])(x - [3]) = [3]$ in $\mathbb{Z}/_{17}\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
(x - [2])(x - [3]) = [3] &\iff x^2 - [5]x + [6] &&= [3] \\
&\iff (x - [11])^2 - [2] + [6] &&= [3] \\
&\iff (x - [11])^2 &&= [16] \\
&\iff x - [11] &&\in \{\pm [4]\} \\
&\iff x &&\in \{[7], [15]\}.
\end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung: $[2]^{-1} \cdot [5] = [11]$

Die Lösungsmenge ist also $\{[7], [15]\}$.

4. Für $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: $v \sim w :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda v = w$.

a) Beh.: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Beweis:

- Reflexivität: Für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt:

  $1 \cdot v = v$ mit $1 \in \mathbb{R}_+ \implies v \sim v$.

- Symmetrie: Seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $v \sim w$. Dann gilt:

  $v \sim w \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda v = w$

  $\implies$ Mit $\mu := \lambda^{-1} \in \mathbb{R}_+$ gilt $\mu w = v$

  $\implies w \sim v$.

- Transitivität: Seien $v, w, u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $v \sim w$, $w \sim u$.

  Dann gilt:

  $v \sim w \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda v = w$

  $w \sim u \implies \exists \mu \in \mathbb{R}_+ : \mu w = u$

  $\implies$ Mit $\nu := \mu \lambda \in \mathbb{R}_+$ gilt $\nu v = \mu(\lambda v) = u$

  $\implies v \sim u$.

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

b) Beh.: $f : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/_\sim \to S^1$, $[(x,y)] \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x,y)$

ist eine wohldefinierte Bijektion.

Beweis:

- Wohldefiniertheit: Sind $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

  mit $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, so gilt:

  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, d.h. $\lambda x_1 = x_2$, $\lambda y_1 = y_2$.

  Es folgt:

  $$\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} (x_2, y_2) = \frac{1}{\lambda \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} (\lambda x_1, \lambda y_1) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} (x_1, y_1),$$

d.h. $f([(x,y)])$ ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten (x,y).

Außerdem gilt für $[(x,y)] \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/_\sim$:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1,$$

d.h. f bildet tatsächlich in S^1 ab.

- Bijektivität: Definiere $g: S^1 \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/_\sim$ durch

  $$g(x,y) := [(x,y)].$$

  Dann gilt:

  - Für $[(x,y)] \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/_\sim$:

    $$g(f([(x,y)])) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\right)$$

    $$= \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathbb{R}_+}}{=} [(x,y)],$$

    d.h. $g \circ f = id_{(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/_\sim}$.

  - Für $(x,y) \in S^1$:

    $$f(g(x,y)) = f([(x,y)]) = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=1,\ \text{da } (x,y) \in S^1}}(x,y) = (x,y),$$

    d.h. $f \circ g = id_{S^1}$.

  Also ist g Umkehrabbildung von f,
  d.h. f ist bijektiv.

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$(1, x, 1), \quad (1, 2x, x+1), \quad (1, x+1, 3) \in \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig?

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 (1, x, 1) + \lambda_2 (1, 2x, x+1) + \lambda_3 (1, x+1, 3) = (0, 0, 0).$$

Wir erhalten folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl|l}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \cdot(-x) \quad \cdot(-1) \\
x\lambda_1 & + & 2x\lambda_2 & + & (x+1)\lambda_3 & = & 0 & + \\
\lambda_1 & + & (x+1)\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 & +
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl|l}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\
 & & x\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \cdot(-1) \\
 & & x\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & +
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
 & & x\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
 & & & & \lambda_3 & = & 0
\end{array}$$

<u>Ist $x \neq 0$</u>, so folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig.

<u>Ist $x = 0$</u>, so erhält man z.B. mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, -1, 0)$ eine nicht-triviale Linearkombination der Null, d.h. die Vektoren sind linear abhängig.

6. $U := \{ p \in \mathbb{P}_n \mid p(0) = 0 \}$.

Beh.: U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{P}_n$.

Beweis:

- $U \neq \emptyset$, denn für das Nullpolynom $p(t) := 0$ gilt $p \in \mathbb{P}_n$ mit $p(0) = 0$, d.h. $p \in U$.
- Für $p, q \in U$ gilt
$$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0, \quad \text{d.h. } p+q \in U.$$
- Für $p \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt
$$(\lambda p)(0) = \lambda \cdot p(0) = \lambda \cdot 0 = 0, \quad \text{d.h. } \lambda p \in U.$$

Also ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{P}_n$.

ges.: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_n / U$.

Für $p \in \mathbb{P}_n$ setze $q(t) := p(t) - p(0)$.

Dann ist $q \in \mathbb{P}_n$ mit $q(0) = 0$, d.h. $q \in U$.

Es folgt $p \equiv p(0) \mod U$, also $[p] = [p(0)]$.

Wir erhalten:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n / U &= \{ [p] \mid p \in \mathbb{P}_n \} = \{ [p(0)] \mid p \in \mathbb{P}_n \} \\ &= \{ p(0) \cdot [1] \mid p \in \mathbb{P}_n \} = \{ \lambda \cdot [1] \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \\ &= \operatorname{span} \{ [1] \}. \end{aligned}$$

Wegen $[1] \neq [0]$ ist $[1]$ eine Basis von $\mathbb{P}_n / U$, d.h. $\dim \mathbb{P}_n / U = 1$.

(Alternativ: $U = \{ t \mapsto a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$
$$= \operatorname{span} \{ \underbrace{t \mapsto t^k, \ k = 1, \dots, n}_{\text{l.u.}} \} \Rightarrow \dim U = n$$
$$\Rightarrow \dim \mathbb{P}_n / U \underset{\text{VL}}{=} \dim \mathbb{P}_n - \dim U = (n+1) - n = 1. \,)$$

7. $U_1 := \text{span}\{(1,0,1), (0,1,0)\}$, $U_2 := \text{span}\{(1,1,1), (1,1,0)\} < \mathbb{K}^3$.

ges.: Basis von U_1.

$(1,0,1)$, $(0,1,0)$ linear unabhängig, erzeugen U_1

$\Rightarrow$ $(1,0,1)$, $(0,1,0)$ ist Basis von U_1.

ges.: Basis von U_2.

$(1,1,1)$, $(1,1,0)$ linear unabhängig, erzeugen U_2

$\Rightarrow$ $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ ist Basis von U_2.

ges.: Basis von $U_1 + U_2$.

$U_1 + U_2 = \text{span}\{(1,0,1), (0,1,0), (1,1,1), (1,1,0)\}$

$\Rightarrow$ Diese Menge enthält eine Basis von $U_1 + U_2$.

$(1,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ linear unabhängig

$\Rightarrow$ $3 \leq \dim(\underbrace{U_1 + U_2}_{\subset \mathbb{R}^3}) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\Rightarrow$ $\dim(U_1 + U_2) = 3$

$\Rightarrow$ $(1,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ ist Basis von $U_1 + U_2$.

ges.: Basis von $U_1 \cap U_2$.

$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = 2 + 2 - 3 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} (1,1,1) = (1,0,1) + (0,1,0) \in U_1 \\ (1,1,1) \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1,1) \in U_1 \cap U_2$$

$\Rightarrow$ $(1,1,1)$ ist Basis von $U_1 \cap U_2$.

8. $A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

ges.: $\mathbb{L}_A = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 0 \}$.

Mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \quad +$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 & \\ & & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 0 & \mid :4 \\ & & -4x_2 & + & 4x_3 & = & 0 & \mid :4 \end{array} \quad +$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & (0 & = & 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Es folgt: $\mathbb{L}_A = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_3,\ x_2 = x_3 \}$

$= \{ (-x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x_3 (-1, 1, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$

$= \operatorname{Span} \{ (-1, 1, 1) \}$.

9. $\phi: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad f \longmapsto \phi(f)$

mit $\phi(f): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x+1)$.

<u>Beh.:</u> ϕ ist linear.

<u>Beweis:</u> • Für $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\phi(f+g)(x) = (f+g)(x+1) = f(x+1) + g(x+1)$$
$$= \phi(f)(x) + \phi(g)(x) = \big(\phi(f) + \phi(g)\big)(x).$$

Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig war, gilt:

$$\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g).$$

• Für $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\phi(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x+1) = \lambda \cdot f(x+1)$$
$$= \lambda \cdot \phi(f)(x) = \big(\lambda \phi(f)\big)(x).$$

Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig war, gilt:

$$\phi(\lambda f) = \lambda \phi(f).$$

Also ist ϕ linear.