

Übungen zur Mathematik I

– Vorbereitungsblatt für die Zwischenklausur –

keine Abgabe

1.

Beweise durch Induktion nach n :

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $n^2 \leq 2^n$.

2.

Ist \mathbb{R} mit dem Produkt

$$x * y := 3x + 4y$$

eine Gruppe?

3.

Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$:

a) $[2]x = [3]$,

b) $(x - [2])(x - [3]) = [3]$.

4.

Zeige:

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wird durch

$$v \sim w :\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda v = w$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

b) Die Abbildung

$$f : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\sim \longrightarrow S^1,$$

$$[(x, y)] \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y)$$

ist eine wohldefinierte Bijektion.

bitte wenden!

5.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$(1, x, 1), \quad (1, 2x, x + 1), \quad (1, x + 1, 3) \in \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig?

6.

Zeige:

$$U := \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(0) = 0\}$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{P}_n .

Bestimme $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_n/U$.

7.

Seien

$$U_1 := \text{span} \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\},$$

$$U_2 := \text{span} \{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Gib Basen von U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ an.

8.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimme \mathbb{L}_A .

9.

Entscheide (mit Begründung), ob die folgende Abbildung ϕ linear ist.

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ \psi & & \psi \\ f & \longmapsto & \phi(f) \end{array}$$

$$\text{mit } \phi(f)(x) := f(x + 1)$$

Die Zwischenklausur findet statt

**am Samstag, den 11.12.2010, von 9:30 Uhr bis 12:00 Uhr
in den Hörsälen 101, 102 und 103
im Landgrafenhäus (Universitätsstraße 7).**

Die Verteilung auf die Hörsäle wird dort am Tag der Klausur durch Aushang bekanntgegeben. Zur Klausur sind ein gültiger Studentenausweis und ein gültiger Lichtbildausweis sowie Schreibzeug mitzubringen. Das Papier wird gestellt.

Wir wünschen viel Erfolg!