Wintersemester 2011/2012

11. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 19.01.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Für jedes $a \in R$, welches keine Einheit ist, sei (a) ein Primideal. Zeigen Sie: R ist ein Körper.

   Anleitung: Studieren Sie das Nullideal (0) und für $a \neq 0$ das Ideal (a^2).

2. Sei R ein Integritätsbereich. Für Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ definieren wir: Ein Element $v \in R$ heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches von $a_1, \ldots, a_n$ ($v = \mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$) genau dann, wenn die beiden folgenden Aussagen erfüllt sind:

   (α) $\forall i \ (1 \leq i \leq n)$ gilt $a_i | v$.

   (β) $\forall v' \in R$ mit $a_i | v' \ \forall i \ (1 \leq i \leq n)$ gilt $v | v'$.

   Zeigen Sie:

   (i) Sind v_1 und v_2 kleinste gemeinsame Vielfache von $a_1, \ldots, a_n$, so gibt es eine Einheit $\varepsilon \in R$ mit $v_2 = \varepsilon v_1$.

   (ii) $v = \mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n) \iff (v) = \bigcap_{i=1}^{n} (a_i)$

   (iii) Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Zu den Elementen $9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ und $3(2 + \sqrt{-5})$ gibt es in R kein kleinstes gemeinsames Vielfaches.

3. Sei R ein euklidischer Ring mit der euklidischen Bewertung $\varphi : R \backslash \{0\} \to \mathbb{N}_0$. Für Elemente $a_0, a_1 \in R$ mit $a_1 \neq 0$ bestimmen wir eine natürliche Zahl N und die endliche Folge $a_0, a_1, \ldots, a_N$ in R nach dem folgenden induktiven Schema:

   Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_i \in R$ bestimmt mit $a_1 \cdot \ldots \cdot a_i \neq 0$, so wählen wir $a_{i+1} \in R$ gemäß

   $$(*) \qquad a_{i-1} = q_i a_i + a_{i+1}$$

   mit $q_i \in R$ und mit $\varphi(a_{i+1}) < \varphi(a_i)$ oder $a_{i+1} = 0$.

Bitte wenden!

Gilt $a_{i+1} = 0$, so setzen wir $N = i$. Gilt $a_{i+1} \neq 0$, so wird das Verfahren mit $i+1$ anstatt i fortgesetzt. Da $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \varphi(a_3), \ldots$ in $\mathbb{N}_0$ streng monoton fallend ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_{N+1} = 0$ und mit $a_1 \cdot \ldots \cdot a_N \neq 0$ (euklidischer Algorithmus).

(i) Zeigen Sie: Ist $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ die nach dem euklidischen Algorithmus zu a_0, a_1 konstruierte Folge, so gilt $a_N = \mathrm{ggT}(a_0, a_1)$.

(ii) Die Relation $(*)$ liefert die Darstellung $a_{i+1} = -q_i a_i + a_{i-1}$. Zeigen Sie: Durch sukzessives Anwenden von $(*)$ erhält man eine Darstellung

$$a_N = ra_0 + sa_1$$

mit $r, s \in R$.

(iii) Bestimmen Sie für die Polynome $f(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ und $g(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ den größten gemeinsamen Teiler $d(X)$. Stellen Sie $d(X)$ in der Form

$$d(X) = r(X)f(X) + s(X)g(X)$$

dar mit $r(X), s(X) \in \mathbb{R}[X]$.

4. Seien $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, K der Quotientenkörper von R und

$$f(X) = 3X^2 + 4X + 3.$$

Zeigen Sie:

(i) $f(X)$ ist im Ring $R[X]$ irreduzibel.

(ii) $f(X)$ ist im Ring $K[X]$ reduzibel.