

13. Übungsblatt zur Algebra

1. Seien G eine Gruppe und k eine natürliche Zahl. G enthalte genau eine Untergruppe U der Ordnung k . Zeigen Sie: U ist Normalteiler in G .
2. Bestimmen Sie alle homomorphen Bilder der additiven Gruppe

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

3. Bestimmen Sie eine Untergruppe U von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, so daß gilt:

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/U \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

4. Sei G eine Gruppe der Ordnung 111. G enthalte zwei nichttriviale Normalteiler. Zeigen Sie: G ist zyklisch.
5. Seien a_1, \dots, a_n und b ganze Zahlen. Zeigen Sie: Die diophantische Gleichung

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

besitzt eine Lösung $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ genau dann, wenn gilt $\text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ teilt b .

6. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Sei y ein Primideal in R , so daß R/y endlich ist. Zeigen Sie: y ist ein maximales Ideal in R .