Analysis II, WiSe 2012\2013 – Erstes Tutorium

Themen der Analysis II:

(1) Analysis im $\mathbb{R}^n$

(2) Gewöhnliche Differentialgleichungen

Grober Überblick über Punkt (1):

(1) Analysis im $\mathbb{R}^n$

Ziel: Wollen Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

untersuchen.

Zunächst zur Stetigkeit. Frage: Was bedeutet Stetigkeit bei Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

Erinnerung: (Analysis I)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ ist in $t \in (a,b)$ stetig

$$:\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to t} f(x) = f(t)$$

$\Big(:\Leftrightarrow \ \forall$ Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (a,b) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = t$ gilt

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(t) \Big)$

Um den Stetigkeitsbegriff aus der Analysis I zu übertragen müssen wir also einen Grenzwertbegriff für Folgen im $\mathbb{R}^n$ definieren.

<u>Erinnerung:</u> (Analysis I)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt Konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$

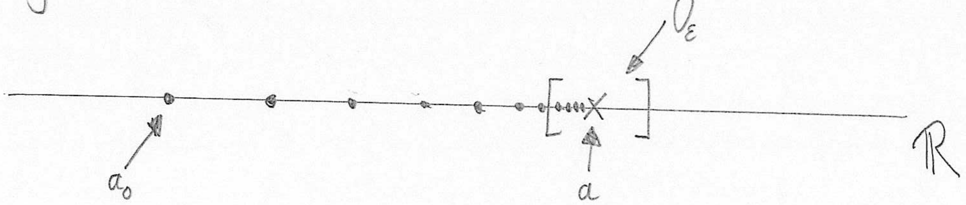
$$:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{mit } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

<u>Anschauung:</u>

Mit $|a_n - a|$ messen wir offenbar den Abstand zwischen a und dem Folgenglied a_n. Die Menge

$$U_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon \}$$

enthält also alle Punkte, deren Abstand zu a Kleiner als ε ist. Für die Konvergenz verlangen wir dass in jeder noch so Kleinen Menge U_ε alle bis auf endlich viele („N") Folgenglieder Liegen:



<u>Also:</u> Um den Konvergenzbegriff zu übertragen, benötigen wir einen Abstandsbegriff auf dem $\mathbb{R}^n$.

Gehen allgemeiner vor: Welche Eigenschaften erwartet man von einem Abstandsbegriff?

M eine Menge. Eine Abbildung

$$d: M \times M \to \mathbb{R}$$

heißt Metrik, falls gilt:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in M$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in M$

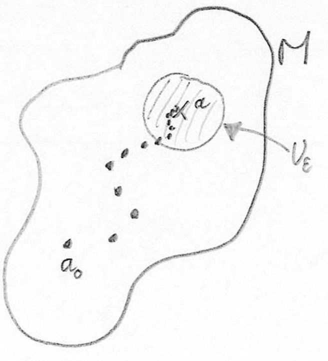
(M,d) ist dann metrischer Raum.

⇝ Alle Forderungen müssen anschaulich an einen Abstandsbegriff gestellt werden.

Damit können wir Konvergenz in metrische Räume übertragen.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in M heißt konvergent gegen $a \in M$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.



Entsprechend können wir dann die Stetigkeit von Funktionen

$$f: M \to N$$

definieren und untersuchen, wenn es auf M und N Metrike d bzw. d' gibt.

Spezialfälle:

- V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\| \, \|: V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V.

$\overset{VL}{\Longrightarrow}$ $d: V \times V \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto \|v-w\|$

definiert Metrik auf V.

- Speziell: $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \overset{\text{Metrik}}{\rightsquigarrow} d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$$

Also: Können von Stetigkeit bei Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

sprechen

- Insbesondere: $n = 1$:

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{d.h.} \quad d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$$

$\rightsquigarrow$ erhalten auf $\mathbb{R}$ den üblichen Konvergenzbegriff.

FAZIT: Um Stetigkeit zu untersuchen sollten wir metrische Räume untersuchen!

<u>Überlegung:</u>

- Abstandsbegriff war erforderlich um Folgen Konvergenz zu erklären.
- Haben dann Stetigkeit mit Folgen Konvergenz definiert.

<u>Frage:</u> Ist Abstandsbegriff für Stetigkeitsbegriff zwingend erforderlich?

<u>Antwort:</u> Nein.

<u>Erinnerung:</u> (Analysis I)

- $p \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. $U_\varepsilon(p) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-p| < \varepsilon\}$.
- $U \subset \mathbb{R}$ heißt offen $\Leftrightarrow$ $\forall p \in U$ ist $U_\varepsilon(p) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$ geeignet.

- <u>Satz:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig
  $\Leftrightarrow$ $\forall$ $U \subset \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ offen.

Hier taucht Abstandsbegriff nur noch indirekt auf!

<u>Also:</u>

- Übertragen Begriff der offenen Menge auf metrische Räume (M,d):

$$p \in M, \ \varepsilon > 0 \qquad U_\varepsilon(p) := \{q \in M \mid d(q,p) < \varepsilon\}$$

$$U \subset M \text{ offen} \Leftrightarrow \forall p \in U \text{ ist } U_\varepsilon(p) \subset U \text{ für } \varepsilon > 0 \text{ geeignet.}$$

<u>Dann:</u> Obiger Satz bleibt richtig!

Eigenschaften offener Mengen:

(i) $\emptyset, M$ sind offen

(ii) $U, V \subset M$ offen $\Rightarrow U \cap V$ ist offen

(iii) $U_i \subset M$ für $i \in I$ offen $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \subset M$ offen

Wir erheben diese Eigenschaften zu einem neuen Begriff:

X eine Menge. Dann heißt $\underline{X} \subset \mathcal{P}(X)$ Topologie auf X, $:\Leftrightarrow$

(i) $\emptyset, X \in \underline{X}$

(ii) $U, V \in \underline{X} \Rightarrow U \cap V \in \underline{X}$

(iii) $U_i \in \underline{X}$ für $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \underline{X}$

Elemente von $\underline{X}$ nennen wir offene Mengen, $(X, \underline{X})$ topologischen Raum. Dann haben wir:

$$M \text{ metrischer Raum} \Rightarrow M \text{ topologischer Raum}$$

Wegen des Satzes kann Stetigkeit auf topologischen Räumen definiert werden:

$(X, \underline{X})$, $(Y, \underline{Y})$ topologische Räume, dann:

$f: X \to Y$ heißt stetig $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, U \in \underline{Y}$ ist $f^{-1}(U) \in \underline{X}$.

Haben also folgende Räume betrachtet:

Normierte Vektorräume $\Rightarrow$ metrische Räume $\Rightarrow$ topologische Räume

(z.B. $(\mathbb{R}^n, \|\,\|)$)

(Hier gibt es Begriff der Folgenkonvergenz)

(Hier gibt es einen Stetigkeitsbegriff!)

Nun zur Differentialrechnung. Frage: Was bedeutet Differenzierbarkeit bei Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

<u>Erinnerung:</u> (Analysis I)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ ist in $t \in (a,b)$ differenzierbar

$:\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to t \\ x \neq t}} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$ existiert in $\mathbb{R}$

<u>Problem:</u> Nicht direkt auf den $\mathbb{R}^n$ übertragbar ($\mathbb{R}^n$ ist kein Körper, d.h. $\frac{1}{x-t}$ für $x, t \in \mathbb{R}^n$ nicht definiert).

<u>Lösung:</u> Haben andere Charakterisierung der Differenzierbarkeit kennen gelernt:

Erinnerung: (Analysis I).

Für $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) f in $t \in (a,b)$ differenzierbar

(ii) f ist in $t \in (a,b)$ linear approximierbar.

Dabei bedeutet die lineare Approximierbarkeit von f in t, dass es eine lineare Abbildung

$$A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gibt, so dass gilt:

Fehler

$$f(t+\xi) = f(t) + A(\xi) + \varepsilon(\xi)$$

wobei ε eine Funktion ist mit

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varepsilon(\xi)}{|\xi|} = 0$$

(„Fehler der Approximation geht gegen t gegen 0")

Um diese Definition zu übertragen benötigen wir nur einen normierten Vektorraum (bspl. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$) !

Um gute Resultate zu erhalten war in Analysis I wichtig:

$\mathbb{R}$ ist vollständig (jede Cauchy-Folge konvergiert).

Wir werden also Vollständigkeit fordern:

Definition:

Ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum, wenn (bzgl. $\|\cdot\|$) jede Cauchy-Folge in V konvergiert.

Wir erhalten dann Differenzierbarkeitsbegriff für Abbildungen

$$f: V \to W$$

wenn V und W Banachräume sind!

Beispiel:

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ist Banachraum.

Also: Betrachten in der Analysis II folgende Typen von Räumen:

Banachräume	$\Rightarrow$	Normierte Vektorräume	$\Rightarrow$	Metrische Räume	$\Rightarrow$	Topologische Räume
$\uparrow$				$\uparrow$		$\uparrow$
Hier können wir Differenzierbarkeit untersuchen				Hier können wir Folgenkonvergenz untersuchen		Hier können wir Stetigkeit untersuchen

Als Spezialfälle erhalten wir:

- Theorie für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- Theorie für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (d.h. Analysis I)