Übungen zur Analysis II

– Blatt 7 –

Alternative Lösung zu Aufgabe 7.3.

Aufgabe 7.3.

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die bezüglich der euklidischen Norm kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten des $\mathbb{R}^n$ eine gerade Strecke ist. Seien dazu $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte und

$$g_{xy} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x + t(y - x)$$

die gerade Verbindungsstrecke zwischen x und y . Zeige: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige stetig differenzierbare Kurve mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$, d.h. mit Anfangspunkt x und Endpunkt y , dann gilt:

$$L(f) \geq L(g_{xy})$$

Beweis. Da die Kurve f rektifizierbar ist, gibt es nach Definition zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass für jede Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

von $[a, b]$ der Feinheit $< \delta$ gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2 - L(f) \right| < \varepsilon$$

Ist nun $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl, dann finden wir also insbesondere eine Unterteilung

$$a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k(n)}^n = b$$

von $[a, b]$, so dass gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{k(n)} \|f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)\|_2 - L(f) \right| < \frac{1}{n}$$

Denn zu $\varepsilon = \frac{1}{n}$ gibt es nach obiger Feststellung ein $\delta(n) > 0$, so dass die Aussage für jede Unterteilung einer Feinheit $< \delta(n)$ gilt. Wir können also einfach eine äquidistante Unterteilung von $[a, b]$ mit geeignet vielen Zwischenpunkten wählen, dann besitzt diese die erforderliche Feinheit.

Nach Konstruktion gilt für diese Unterteilungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{k(n)} \|f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)\|_2 \right) = L(f)$$

Wir schätzen nun folgendermaßen mit der Dreiecksungleichung ab, wobei wir ausnutzen,

dass eine Teleskopsumme entsteht:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k(n)} \|f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)\|_2 &\geq \left\| \sum_{i=1}^{k(n)} (f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)) \right\|_2 \\ &= \|f(t_{k(n)}^n) - f(t_0^n)\|_2 \\ &= \|f(b) - f(a)\|_2 \\ &= \|y - x\|_2 \\ &= L(g_{xy})\end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für alle Glieder aus obigem Grenzprozess richtig ist, erhalten wir aus der Monotonie der Grenzwertbildung

$$L(g_{xy}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{k(n)} \|f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)\|_2 \right) = L(f)$$

also die gewünschte Ungleichung. □

Bemerkung:

Dieser Beweis zeigt die Aussage sogar für jede rektifizierbare Kurve f – die stetige Differenzierbarkeit ist nicht erforderlich.