Typische Aufgabenstellungen zu metrischen und normierten Räumen

Wir setzen im Folgenden stets einen metrischen bzw. normierten Raum voraus.

Untersuchung einer Menge auf Kompaktheit

- Sind wir in $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm bzw. allgemeiner in einem endlich-dimensionalen normierten Raum, so gilt der Satz von Heine-Borel, d. h. wir können untersuchen, ob die Menge abgeschlossen und beschränkt ist.

BEISPIEL: $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_n \geq 0, \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$ („Standard-Simplex“) ist kompakt in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

- Sind wir nicht in dieser Situation, so können wir evtl. dennoch auf diese Art feststellen, dass eine Menge nicht kompakt ist. Genauer:

– Ist eine Menge nicht abgeschlossen, so ist sie nicht kompakt.

BEISPIEL: $\{f \in C[0, 1] : \|f\|_\infty < 1\}$ ist nicht kompakt in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$.

– Ist eine Menge nicht beschränkt, so ist sie nicht kompakt.

BEISPIEL: $\{f \in C[0, 1] : \|f\|_\infty \geq 1\}$ ist nicht kompakt in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$.

- Manchmal können wir an der Darstellung einer Menge sofort erkennen, dass sie das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist. Solche Mengen sind kompakt.

BEISPIEL: $M = \{(1-t)x + ty \in X : t \in [0, 1]\}$ („Strecke“) ist für einen beliebigen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ und feste $x, y \in X$ kompakt in $(X, \|\cdot\|)$, denn es ist $M = f([0, 1])$, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow X, t \mapsto (1-t)x + ty$, stetig und $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ kompakt ist.

- Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.

BEISPIEL: Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, so ist für festes $x \in X$ die Menge $\{y \in X : d(x, y) \leq 1\}$ kompakt in (X, d) .

- Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß genügt es zu untersuchen, ob eine Menge folgenkompakt ist.

BEISPIEL: $\{f \in C[0, 1] : \|f\|_\infty = 1\}$ ist nicht kompakt in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$.

- Schließlich können wir immer auf die Definition der Kompaktheit zurückgreifen und untersuchen, ob zu jeder offenen Überdeckung der Menge eine endliche Teilüberdeckung existiert.

BEISPIEL: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (X, d) , so ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\}$ kompakt in (X, d) .

Untersuchung einer Menge auf Offenheit

- Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind offen. (Typisch: In der Darstellung der Menge kommt „<“, „>“ oder „ $\neq$ “ vor.)

BEISPIEL: $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n x_j > 0\}$ ist offen in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

- Komplemente abgeschlossener Mengen sind offen.

- Endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

BEISPIEL:

$$\{f \in C[0, 1] : f(0) > 0 \text{ und } f(1) > 0\} = \{f \in C[0, 1] : f(0) > 0\} \cap \{f \in C[0, 1] : f(1) > 0\}$$

und

$$\{f \in C[0, 1] : \exists x \in [0, 1] : f(x) > 0\} = \bigcup_{x \in [0, 1]} \{f \in C[0, 1] : f(x) > 0\}$$

sind offen in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, denn für jedes feste $x \in [0, 1]$ ist die Abbildung $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), f \mapsto f(x)$, stetig.)

- Ansonsten können wir auf die Definition der Offenheit einer Menge M in einem metrischen Raum (X, d) zurückgehen und untersuchen, ob zu jedem Punkt $x \in M$ ein Radius $r > 0$ existiert mit $B_d(x, r) \subset M$.

Untersuchung einer Menge auf Abgeschlossenheit

- Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen. (Typisch: In der Darstellung der Menge kommt „ $\leq$ “, „ $\geq$ “ oder „ $=$ “ vor.)
- Komplemente offener Mengen sind abgeschlossen.
- Endliche Vereinigungen und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- Eine Menge M in einem metrischen Raum (X, d) ist genau dann abgeschlossen, wenn zu jeder in X konvergenten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ schon $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M$ gilt.

BEISPIELE: analog zur Offenheit

Untersuchung einer Menge auf Beschränktheit

Für eine Menge M in einem metrischen Raum (X, d) bzw. einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ gilt:

- Existiert ein $r > 0$ mit $M \subset B(0, r)$, so ist M beschränkt.
- Existiert ein $r > 0$ mit $d(x, y) \leq r$ für alle $x, y \in M$, so ist M beschränkt.
- Existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$, so ist M unbeschränkt.
BEISPIEL: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$ ist unbeschränkt in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Untersuchung einer Abbildung auf Stetigkeit

- Kombinationen (Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten mit Nenner $\neq 0$, Kompositionen) stetiger Funktionen sind stetig. Dabei ist besonders nützlich, dass die Koordinatenprojektionen

$$\text{pr}_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_j, \quad j = 1, \dots, n$$

bzgl. beliebiger Normen stetig sind.

BEISPIEL: $f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(x, y) \longmapsto \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + e^y}$ ist stetig.

- Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen normierten Räumen sind stetig.
BEISPIEL: Ist $P_n = \{\sum_{j=0}^n a_j x^j : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \subset C[0, 1]$ die Menge der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ auf $[0, 1]$, so ist $D : (P_{n+1}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (P_n, \|\cdot\|_\infty)$, $\sum_{j=0}^{n+1} a_j x^j \longmapsto \sum_{j=1}^{n+1} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=0}^n (j+1) a_{j+1} x^j$, (das Ableiten) stetig.
- Für einen metrischen Raum (X, d) und festes $y \in X$ bzw. $x \in X$ sind die folgenden direkt aus der Metrik abgeleiteten Abbildungen stetig:

$$d(\cdot, y) : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad x \longmapsto d(x, y), \quad d(x, \cdot) : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad y \longmapsto d(x, y)$$

- Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist die Norm

$$\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad x \longmapsto \|x\|$$

stetig.

- Ansonsten kann man die Stetigkeit „zu Fuß“ nachrechnen. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$. Dann gilt:

- f ist genau dann stetig in x_0 , wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d_X(x_0, x) < \delta \implies d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$
- f ist genau dann stetig in x_0 , wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_{d_X}(x_0, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$
- f ist genau dann stetig in x_0 , wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x_0)$ unter f eine Umgebung von x_0 ist.
- f ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y unter f eine offene Teilmenge von X ist.

BEISPIEL: $F : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f \longmapsto f(0) + f(1)$, ist stetig, denn: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Dann gilt für alle $g \in C[0, 1]$ mit $\|f - g\|_\infty < \delta$:

$$\begin{aligned} |F(f) - F(g)| &= |(f(0) + f(1)) - (g(0) + g(1))| = |(f(0) - g(0)) + (f(1) - g(1))| \\ &\leq |f(0) - g(0)| + |f(1) - g(1)| = |(f - g)(0)| + |(f - g)(1)| \leq 2 \|f - g\|_\infty < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$