

Folgen und Reihen reeller Zahlen

Definitionen

- Eine *Folge reeller Zahlen* ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ für ein einzelnes Folgenglied und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ statt a für die gesamte Folge.

ANSCHAULICH: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Aufzählung $a_1, a_2, a_3, \dots$ reeller Zahlen.

- Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen* $\hat{a} \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |a_n - \hat{a}| < \varepsilon$$

In diesem Fall heißt $\hat{a}$ der *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Schreibweise: $a_n \rightarrow \hat{a}$ ($n \rightarrow \infty$) oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \hat{a}$.

IN WORTEN: Für jeden noch so kleinen positiven Abstand ε existiert ein Index N (der i. A. von ε abhängt), so dass für jeden folgenden Index n das zugehörige Folgenglied a_n einen Abstand $|a_n - \hat{a}|$ zu $\hat{a}$ hat, der kleiner als ε ist.

ANSCHAULICH: Wenn man genügend weit hinten in der Folge nachschaut, findet man nur noch Folgenglieder, die einen beliebig kleinen vorgegebenen Abstand zum Grenzwert einhalten. I. A. muss man umso weiter hinten nachschauen, je kleiner der vorgegebene Abstand ist.

- Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *divergent*, wenn sie gegen kein $\hat{a} \in \mathbb{R}$ konvergiert.
- Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls gilt:

$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : a_n \geq R \quad \text{bzw.} \quad \forall R \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : a_n \leq R$$

Schreibweise: $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ bzw. jeweils mit $-\infty$.

ANSCHAULICH: Wenn man genügend weit hinten in der Folge nachschaut, findet man nur noch Folgenglieder, die eine beliebig große bzw. kleine vorgegebene Schranke über- bzw. unterschreiten.

- Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Eine *Reihe reeller Zahlen* ist eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schreibweise: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Das n -te Folgenglied s_n der Reihe wird auch als n -te *Partialsumme* der Reihe bezeichnet. Im Fall der Konvergenz einer Reihe mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \hat{s}$ heißt der Grenzwert $\hat{s}$ auch *Reihenwert* oder *Summe der Reihe*. Er wird ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. (Man beachte also die Doppelbezeichnung: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Reihe als auch ihren Grenzwert.)

Nützliche Sätze

- **Grenzwertsätze:** Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Die Folgen $(a_n \pm b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

- Die Folge $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

- Allgemeiner: Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

- Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, so ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

ACHTUNG: Die Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine notwendige Voraussetzung und sollte entweder vor Anwendung eines Grenzwertsatzes geprüft werden oder zunächst mit einem Vermerk wie „falls die Grenzwerte existieren“ angenommen und im Nachhinein verifiziert werden.

- **Einschließungssatz:** Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Konvergieren $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert $\hat{a}$, dann konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\hat{a}$. Insbesondere gilt: Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0, dann konvergiert auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0.
- Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge, d. h. $b_1 \leq b_2 \leq \dots$, die nach oben beschränkt ist, d. h. es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $b_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent. Insbesondere gilt: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^n a_k \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c \text{ für } c \in \mathbb{R} \text{ (konstante Folge)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergiert („harmonische Reihe“),}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \text{ falls } |q| < 1 \text{ („geom. Reihe“),} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \text{ konvergiert, falls } s \in \mathbb{R} \text{ mit } s > 1 \text{ („Riemannsche } \zeta\text{-Funktion“)}$$

Beispiele

Behauptung: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n}$ konvergiert gegen 2.

Beweis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) \stackrel{\text{falls lim ex.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

Das Auseinanderziehen der Summe wird im Nachhinein durch die Existenz der beiden Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} 2$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ gerechtfertigt.

Behauptung: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert gegen 1.

Beweis: Für alle $k \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Es folgt für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)}_{=0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)}_{=0} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)}_{=0} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Und schließlich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \stackrel{\text{falls lim ex.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}$$

Wegen $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) konvergiert auch $\frac{1}{n+1}$ gegen 0. Folglich konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ gegen $1 - 0 = 1$.

BEMERKUNG: Der hier verwendete Trick des „Zusammenschiebens“ einer Summe aus n Differenzen in eine einzige Differenz heißt „Teleskoptrick“. Er kann auch ohne die „ $\dots$ “-Schreibweise mit Indexverschiebungen durchgeführt werden.