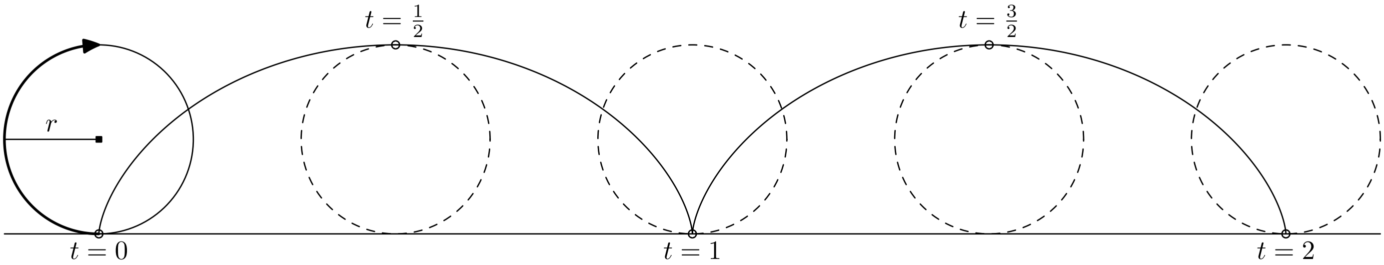
Matthias Stemmler
stemmler@mathematik.uni-marburg.de

SS 2007

Beispiele für ebene Kurven

Zykloide (Rollkurve)

Eine Zykloide ist der Weg, den ein fester Punkt auf einem Kreis zurücklegt, während dieser auf einer Geraden „entlangrollt“.



Parametrisierung für n Umdrehungen, $n \in \mathbb{N}$:

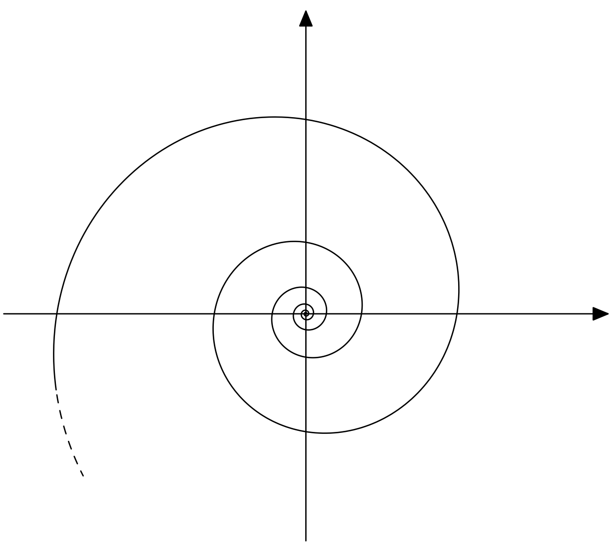
$$\varphi : [0, n] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad t \longmapsto \begin{pmatrix} 2\pi r t \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(-\pi/2 - 2\pi t) \\ r \sin(-\pi/2 - 2\pi t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2\pi t - \sin(2\pi t) \\ 1 - \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

Bogenlänge:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^n \|\varphi'(t)\|_2 \, dt = \int_0^n \left\| r \begin{pmatrix} 2\pi - 2\pi\cos(2\pi t) \\ 2\pi \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \right\|_2 dt = 2\pi r \int_0^n \left\| \begin{pmatrix} 1 - \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \right\|_2 dt \\ &= 2\pi r \int_0^n \Big(\big(1 - \cos(2\pi t)\big)^2 + \sin^2(2\pi t) \Big)^{1/2} dt = 2\pi r \int_0^n \big(1 - 2\cos(2\pi t) + \underbrace{\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)}_{=1}\big)^{1/2} dt \\ &= 2\pi r \int_0^n \big(2 - 2\cos(2\pi t)\big)^{1/2} dt \overset{(*)}{=\!=} 2\pi r \int_0^n \big(4 \sin^2(\pi t)\big)^{1/2} dt = 4\pi r \int_0^n \big|\sin(\pi t)\big| \, dt \\ &= 4\pi r \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \big|\sin(\pi t)\big| \, dt = 4\pi r \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (-1)^{k-1} \sin(\pi t) \, dt = 4\pi r \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi} \right]_{t=k-1}^k \\ &= 4r \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \big(\cos(\pi(k-1)) - \cos(\pi k) \big) = 4r \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k-1} \big((-1)^{k-1} - (-1)^k \big)}_{=2} = 8nr \end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir benutzt, dass $1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Logarithmische Spirale



Parametrisierung:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t \cos(2\pi t) \\ e^t \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$