

Der Satz und das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf

Satz (Existenzsatz von Picard¹-Lindelöf², ca. 1890)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, c) \in G$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion

$$\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die folgendes Anfangswertproblem erster Ordnung mit n Differentialgleichungen löst:

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = c$$

Bemerkungen

- Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass f lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist, dass f bzgl. y stetig partiell differenzierbar ist.
- Die Lösung φ des obigen Anfangswertproblems ist auf $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ eindeutig bestimmt.

Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf

Unter den obigen Voraussetzungen sei der Operator T definiert durch

$$T : \begin{cases} C([a - \varepsilon, a + \varepsilon], \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C([a - \varepsilon, a + \varepsilon], \mathbb{R}^n) \\ \varphi & \longmapsto & T\varphi \end{cases} \quad \text{mit} \quad (T\varphi)(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt$$

Dann konvergiert die rekursiv definierte Folge

$$\varphi_0(x) = c \text{ (konstant)}, \quad \varphi_{k+1} := T\varphi_k, \quad k \geq 0$$

in $(C([a - \varepsilon, a + \varepsilon], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|$ gegen die Lösung des obigen Anfangswertproblems.

Beispiel

Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem zweiter Ordnung:

$$y'' = -y, \quad \begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{matrix} \quad (\text{I})$$

Man erkennt sofort, dass $y = \cos$ das Problem löst. Andererseits erhält man die Lösung auch über das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf. Dazu führen wir (I) zunächst auf ein Anfangswertproblem erster Ordnung mit zwei Differentialgleichungen zurück. (I) ist äquivalent zu

$$\begin{matrix} y'_0 = y_1 & y_0(0) = 1 \\ y'_1 = -y_0 & y_1(0) = 0 \end{matrix} \quad (\text{II})$$

Dabei entspricht die Lösung y von (I) der Lösung y_0 von (II). Hier ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $a = 0$ und $c = (1, 0)^T$. Wir erhalten die folgende Iterationsvorschrift:

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f(t, \varphi_n(t)) dt, \quad \text{wobei} \quad f(x, y_0, y_1) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 \end{pmatrix}$$

Beginnend mit der konstanten Funktion $\varphi_0(x) = c = (1, 0)^T$ führen wir vier Schritte durch:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f(t, 1, 0) dt &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix} \\ \varphi_2(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f(t, 1, -t) dt &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} -t \\ -1 \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2} \\ -x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{2} \\ -x \end{pmatrix} \\ \varphi_3(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f\left(t, 1 - \frac{t^2}{2}, -t\right) dt &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} -t \\ -1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2} \\ -x + \frac{x^3}{6} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{2} \\ -x + \frac{x^3}{6} \end{pmatrix} \\ \varphi_4(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f\left(t, 1 - \frac{t^2}{2}, -t + \frac{t^3}{6}\right) dt &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} -t + \frac{t^3}{6} \\ -1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ -x + \frac{x^3}{6} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ -x + \frac{x^3}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹Charles Émile Picard (1856–1941), französischer Mathematiker

²Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946), finnischer Mathematiker

Wir betrachten zur Vereinfachung nur gerade Indizes und vermuten, dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$\varphi_{2n}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{pmatrix}$$

Wir beweisen diese Aussage durch Induktion nach n :

INDUKTIONSANFANG: $n = 0$:

$$\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^0 (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ -\sum_{k=0}^{-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{pmatrix}$$

INDUKTIONSSCHRITT: $n \rightarrow n+1$: Ein Iterationsschritt liefert

$$\begin{aligned} \varphi_{2n+1}(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f(t, \varphi_{2n}(t)) dt \stackrel{(IV)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f\left(t, \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}, -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) dt \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \\ -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und ein weiterer Iterationsschritt schließlich

$$\begin{aligned} \varphi_{2(n+1)}(x) &= \varphi_{2n+2}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f(t, \varphi_{2n+1}(t)) dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f\left(t, \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}, -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) dt \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \\ -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ -\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ergibt sich der folgende Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{2n}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

Obwohl der Satz von Picard-Lindelöf nur die Lösbarkeit auf einem kleinen Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ garantiert, sind die Funktionen $y_0 = \cos$ und $y_1 = -\sin$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Durch Einsetzen verifizieren wir, dass sie tatsächlich das Problem (II) lösen:

$$\begin{aligned} y_0' &= \cos' = -\sin = y_1 & y_0(0) &= \cos(0) = 1 \\ y_1' &= (-\sin)' = -\cos = -y_0 & y_1(0) &= -\sin(0) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist $y = y_0 = \cos$ eine Lösung von (I). Alternativ kann man auch (I) direkt verifizieren:

$$\begin{aligned} y'' &= \cos'' = (-\sin)' = -\cos = -y, & y(0) &= \cos(0) = 1 \\ & & y'(0) &= \cos'(0) = -\sin(0) = 0 \end{aligned}$$