Matthias Stemmler
stemmler@mathematik.uni-marburg.de SS 2007

Der Satz über implizite Funktionen

Der Satz über implizite Funktionen beschäftigt sich mit einer Fragestellung, die sich auf verschiedene Arten formulieren lässt:

- Wir haben ein reelles Gleichungssystem mit mindestens so vielen Unbekannten wie Gleichungen, etwa $k+m$ Unbekannte $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_m$ und m Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

  Können wir zu gegebenen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ gewisse $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ wählen, so dass $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)$ das Gleichungssystem löst? Falls ja, ist diese Wahl eindeutig? Können die $y_1, \ldots, y_m$ sogar so gewählt werden, dass sie stetig (partiell) differenzierbar von den $x_1, \ldots, x_k$ abhängen?

- Wir haben eine Funktion F, die von $\mathbb{R}^{k+m} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ in einen kleineren Raum $\mathbb{R}^m$ abbildet und betrachten ihre Nullstellenmenge, eine Teilmenge von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Lässt sich diese als Graph einer stetig (partiell) differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ darstellen?

Diese beiden Formulierungen drücken offenbar dieselbe Frage aus: Existiert zu einer gegebenen Funktion $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig (partiell) differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^m$ genau dann $F(x, y) = 0$ gilt, wenn $y = g(x)$ gilt?

Es stellt sich heraus, dass dies unter gewissen Einschränkungen möglich ist:

- Das Problem lässt sich höchstens lokal lösen, d. h. zu gegebenen $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit $F(a, b) = 0$ findet man eine Umgebung von a in $\mathbb{R}^k$ und eine Umgebung von b in $\mathbb{R}^m$, in denen man eine Lösung des Problems erwarten kann.
- Die gegebene Funktion F muss stetig (partiell) differenzierbar sein und in dem betrachteten $(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ eine gewisse Regularitätsbedingung erfüllen.

Genaueres sagt der

Satz über implizite Funktionen
Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen und

$$F = (F_1, \ldots, F_m) : U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad (x, y) = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) \longmapsto F(x, y)$$

stetig (partiell) differenzierbar. Sei $(a, b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a, b) = 0$, so dass die quadratische Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar ist. Dann existiert eine offene Umgebung $V_1 \subset U_1$ von a, eine offene Umgebung $V_2 \subset U_2$ von b und eine stetig (partiell) differenzierbare Funktion $g : V_1 \longrightarrow V_2$ mit

$$F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x)$$

für alle $x \in V_1$, $y \in V_2$, d. h.

$$\operatorname{Graph}(g) = F^{-1}(\{0\}) \cap \big(V_1 \times V_2\big)$$

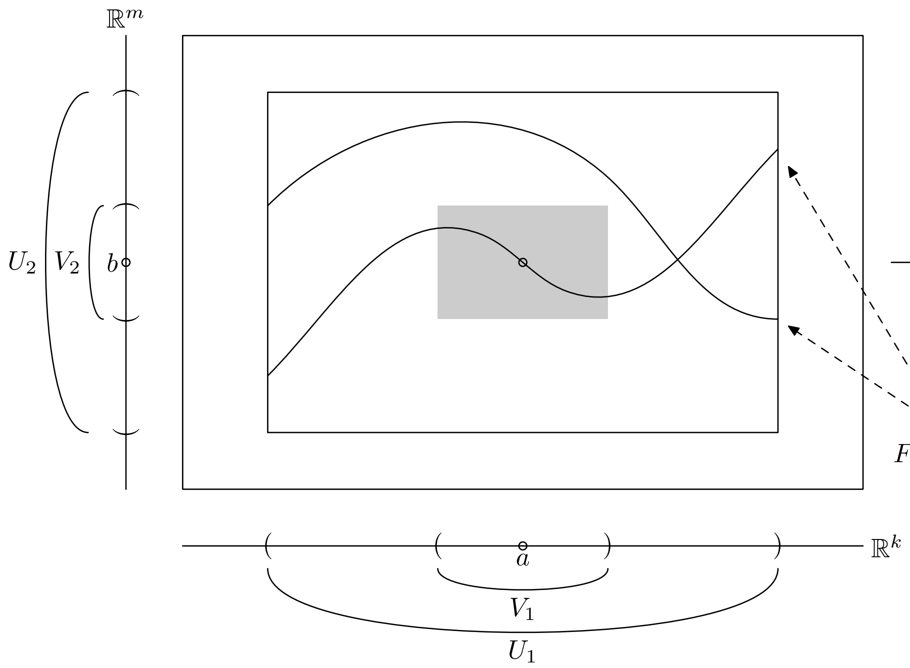
Ferner ist $\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, g(x)\big)$ für alle $x \in V_1$ invertierbar und

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, g(x)\big)\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, g(x)\big)\right)$$

Dabei haben wir folgende Schreibweisen verwendet:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, y)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k}} \in \mathbb{R}^{m \times k}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y)\right)_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x) := \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k}} \in \mathbb{R}^{m \times k}$$

Bemerkung: Man sagt, die Funktion g werde durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ implizit definiert.



Beispiel

Gegeben sei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \longmapsto x^2 - y^4$$

F ist stetig (partiell) differenzierbar und es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -4y^3 \text{ invertierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad -4y^3 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \neq 0$$

Betrachten wir also etwa den Punkt $(a, b) = (4, 2) \in \mathbb{R}^2$, so gilt $F(a, b) = 4^2 - 2^4 = 0$ und wegen $b = 2 \neq 0$ ist $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar. Der Satz über implizite Funktionen sagt dann, dass eine offene Umgebung $V_1 \subset \mathbb{R}$ von 4, eine offene Umgebung $V_2 \subset \mathbb{R}$ von 2 und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V_1 \longrightarrow V_2$ existiert mit

$$F(x, y) = x^2 - y^4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x)$$

für alle $x \in V_1$, $y \in V_2$. Die Ableitung von g ist gegeben durch

$$g'(x) = -\left(-4g(x)^3\right)^{-1}(2x) = \frac{x}{2g(x)^3}$$

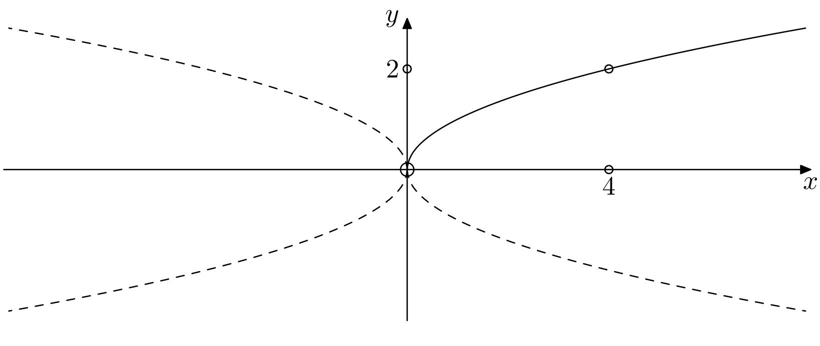
Tatsächlich können wir das Geschehen in dieser einfachen Situation „zu Fuß" nachvollziehen: Wir wählen z. B. $V_1 := (0, \infty)$, $V_2 := (0, \infty)$ und $g : V_1 \longrightarrow V_2$, $x \longmapsto \sqrt{x}$. Dann sind $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}$ offen mit $4 \in V_1$ und $2 \in V_2$. g bildet tatsächlich von V_1 nach V_2 ab und ist stetig differenzierbar mit

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x}{2(\sqrt{x})^3} = \frac{x}{2g(x)^3}$$

Ferner gilt für alle $x \in V_1$, $y \in V_2$, also $x, y > 0$:

$$F(x, y) = x^2 - y^4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x} = g(x)$$

In der folgenden Skizze bilden alle vier Äste zusammen die Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 0$. Der rechte obere Ast ist der Graph von g.



An der Skizze lässt sich auch erkennen, warum die Wahl $(a, b) = (0, 0)$ nicht möglich gewesen wäre.