

Analysis II, WiSe 2012/2013 - Lösung Blatt 1

1.1. • $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar

$\Rightarrow f - g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Zu zeigen: $\int_a^b (f - g)(x) dx = 0$

(denn wegen der Linearität des Riemann-Integrals folgt hieraus

$$0 = \int_a^b (f - g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

und damit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

• Idee: Arbeiten mit Riemannschen Summen.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Nach Vorlesung existiert dann ein $\delta > 0$ so dass gilt:

Ist $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Partition von $[a, b]$ der Feinheit $\mu(P) < \delta$ und sind

$$\eta_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

irgendwelche Stützstellen, dann gilt:

$$\left| \int_a^b (f - g)(x) dx - \sum_{j=1}^n (f - g)(\eta_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon.$$

Wir wählen also irgendeine Partition

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{von } [a, b]$$

der Feinheit $\mu(P) < \delta$.

Idee: Haben an dieser Stelle die Freiheit geeignete Stützstellen zu wählen.

Wegen $x_{j-1} < x_j$ existiert nach Analysis I jeweils ein

$$\eta_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad \text{mit } \eta_j \in \mathbb{Q} \quad (\text{ÜA I.3.1.})$$

Mit diesen Stützstellen gilt also:

$$\left| \int_a^b (f-g)(x) dx - \sum_{j=1}^n (f-g)(\eta_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon.$$

Wegen $\eta_j \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ gilt aber nach

Voraussetzung:

$$f(\eta_j) = g(\eta_j) \quad \text{d.h.} \quad (f-g)(\eta_j) = 0$$

Also folgt wegen

$$\left| \int_a^b (f-g)(x) dx - \sum_{j=1}^n \underbrace{(f-g)(\eta_j)}_{=0} (x_j - x_{j-1}) \right| = \left| \int_a^b (f-g)(x) dx \right|$$

die Ungleichung

$$\left| \int_a^b (f-g)(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $\int_a^b (f-g)(x) dx = 0$.



1.2. (i)

(a) Wähle

$$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^4}{4} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = x^3$$

Damit:

$$\int_1^2 x^3 \ln(x) dx = \int_1^2 f(x) g'(x) dx \stackrel{\text{Partielle Integration}}{=} f(x) g(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 g(x) f'(x) dx$$

$$= \ln(2) \cdot \frac{2^4}{4} - \underbrace{\ln(1) \cdot \frac{1^4}{4}}_{=0} - \frac{1}{4} \int_1^2 x^4 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= 4 \ln(2) - \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2$$

$$= 4 \ln(2) - \frac{1}{16} (2^4 - 1^4)$$

$$= 4 \ln(2) - \frac{15}{16}$$

$$\text{Also: } \int_1^2 x^3 \ln(x) dx = 4 \ln(2) - \frac{15}{16}$$

(b) Berechnen:

$$\int_0^\pi \exp(x) \sin(x) dx \stackrel{\text{Part. Integration}}{=} \exp(x) \sin(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \exp(x) \cos(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Part. Integration}}{=} \exp(x) \sin(x) \Big|_0^\pi - \exp(x) \cos(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \exp(x) \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^\pi \exp(x) \sin(x) dx = \exp(x) \sin(x) \Big|_0^\pi - \exp(x) \cos(x) \Big|_0^\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \exp(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\exp(x) \sin(x) \Big|_0^{\pi}}_{=0 \text{ da } \sin(0)=\sin(\pi)=0} - \exp(x) \cos(x) \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\underbrace{\exp(\pi) \cos(\pi)}_{=-1} - \underbrace{\exp(0) \cos(0)}_{=1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \exp(\pi) + \frac{1}{2}$$

(c) Mit

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 4$$

berechnen wir:

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+4} dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+4} dx + 3 \int_0^1 \frac{1}{x^2+4} dx$$

$$\stackrel{\text{Substitution } \varphi(x)=2x}{=} \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx + 3 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2t)^2+4} \cdot 2 dt$$

$$= \ln(|f(x)|) \Big|_0^1 + \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= \ln(5) - \ln(4) + \frac{3}{2} (\arctan(x)) \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\arctan(0)=0$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \ln(5) - \ln(4) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

(ii) • Zunächst ist

$$\frac{d}{dx} (\exp(-x^2)) = -2x \exp(-x^2).$$

Also berechnen wir für $t \geq 0$ beliebig:

$$\int_0^t x \exp(-x^2) dx = \left(-\frac{1}{2} \exp(-x^2) \right) \Big|_0^t$$

$$= -\frac{1}{2} \exp(-t^2) + \frac{1}{2} \exp(0)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-t^2)$$

• Einerseits ist

$$\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2} \exp(-t^2)}_{\geq 0} \leq \frac{1}{2}$$

Andererseits:

$$\exp(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} = 1 + t^2 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!}}_{\geq 0 \text{ da } t^2 \geq 0} \geq 1 + t^2 \geq t^2$$

Also:

$$\exp(-t^2) = \frac{1}{\exp(t^2)} \leq \frac{1}{t^2}$$

und damit:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-t^2) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}$$

• Ist nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine Folge mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2a_n^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

d.h.

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2a_n^2} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-a_n^2) \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-a_n^2) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{a_n} x \exp(-x^2) dx$$

Da die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig war ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \quad (\text{insb.: Grenzwert existiert}).$$

$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral existiert mit

$$\int_0^{\infty} x \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2}$$



1.3. Wir definieren

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \sin(2kx) - \sum_{k=1}^m b_k \cos(kx).$$

$\Rightarrow f$ ist stetig $\Rightarrow f$ ist (auf kompakten Intervallen)
Riemann-integrierbar.

Zu zeigen: $\exists x \in [0, \pi]$ mit $f(x) = 0$

$\nearrow f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$ oder $f(x) < 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$

(denn gäbe es $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$,
dann gäbe es nach dem Zwischenwertsatz (f ist stetig!) ein
 $\eta \in [0, \pi]$ zwischen x_1 und x_2 mit $f(\eta) = 0 \nmid$)

Wegen der Monotonie des Riemann-Integrals folgt:

$$\int_0^{\pi} f(x) dx > 0 \quad \text{oder} \quad \int_0^{\pi} f(x) dx < 0$$

In jedem Fall haben wir also

$$\int_0^{\pi} f(x) dx \neq 0 \quad (*)$$

Mit der Linearität des Riemann-Integrals können wir
aber andererseits berechnen:

$$\int_0^\pi f(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k \int_0^\pi \sin(2kx) dx - \sum_{k=1}^m b_k \int_0^\pi \cos(kx) dx$$

Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(2kx) dx &= -\frac{1}{2k} (\cos(2kx)) \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2k} \left(\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - \underbrace{\cos(0)}_{=1} \right) = 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(kx) dx &= \frac{1}{k} (\sin(kx)) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{k} \left(\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right) = 0 \end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\int_0^\pi \sin(2kx) dx}_{=0} - \sum_{k=1}^m b_k \underbrace{\int_0^\pi \cos(kx) dx}_{=0} \\ &= 0 \quad \text{⚡ gegen (*)} \end{aligned}$$

Also existiert doch ein $x \in [0, \pi]$ mit $f(x) \neq 0$.



1.4. (i) Nach Voraussetzung sind die $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. $\exists M_n \geq 0$ mit

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in K.$$

Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in K$$

Insbesondere mit $\varepsilon = 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| \leq 1 \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in K.$$

Damit schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \\ &\leq 1 + M_N \quad \forall x \in K \end{aligned}$$

Also ist $1 + M_N > 0$ eine Schranke für f , d.h. die Grenzfunktion f ist beschränkt.

(ii) (a) Für $y > 0$ ist

$$\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = 1 + y + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 1 + y \geq y.$$

Damit berechnen wir:

$$\exp(-n(x^2+1)) = \frac{1}{\underbrace{\exp(n(x^2+1))}_{\geq 1}} \leq \frac{1}{n(x^2+1)} \quad (*)$$

Damit:

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\mathbb{R}} &= \sup \{ |f_n(x)| \mid x \in \mathbb{R} \} \\ &= \sup \{ |\exp(-n(x^2+1))| \mid x \in \mathbb{R} \} \\ &= \sup \{ \exp(-n(x^2+1)) \mid x \in \mathbb{R} \} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sup \left\{ \frac{1}{\underbrace{n(x^2+1)}_{\geq 1}} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

d.h. wir haben

$$\|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} = \|f_n\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also folgt wegen $\|f_n\|_{\mathbb{R}} \geq 0$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} = 0$$

d.h. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) gegen die Nullfunktion

$$0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0.$$

(b) Für festes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) = x$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2.$$

$\Rightarrow$ Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$$

Es ist:

$$\|g_n - g\|_{\mathbb{R}} = \sup \left\{ \left| \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2 \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left| x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2 \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left| 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \infty$$

Also konvergiert $(\|g_n - g\|_{\mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen 0.

$\Rightarrow$ Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig.

(c) Zunächst ist

$$h_n(0) = \frac{n \cdot 0}{1 + |n \cdot 0|} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(0) = 0$$

Für $x \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot x}{1 + |n \cdot x|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot x}{1 + n \cdot |x|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + |x|} \\ &= \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Grenzfunktion

$$\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

↗ $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig.

Da alle h_n stetig sind, ist nach Vorlesung auch die Grenzfunktion stetig ⚡ sgn ist in 0 unstetig.

⇒ Die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig.

