Analysis II, WiSe 2012\2013 – Lösung Blatt 10

10.1. • Wir berechnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{-4y\,(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-4y}{(x+y)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(2,2) = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{4x\,(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{4x}{(x+y)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(2,2) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2(x+y)^2 + 4x(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-2(x+y)+4x}{(x+y)^3} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2) = 0$$

• Taylorentwicklung der Ordnung 0:

$$f(x,y) = f(2,2) + o(1) = 0 + o(1).$$

• Taylorentwicklung der Ordnung 1:

$$f(x,y) = f(2,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)(y-2) + o(\|(x,y)-(2,2)\|_2)$$

$$= \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(y-2) + o(\|(x,y)-(2,2)\|_2)$$

(„Lineare Approximation durch totales Differential")

- Taylorentwicklung der Ordnung 2:

$$f(x,y) = f(2,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)(y-2) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(2,2)(x-2)^2$$

$$+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(2,2)(y-2)^2 + \frac{1}{1! \cdot 1!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,2)(x-2)(y-2)$$

$$+ o\left(\|(x,y)-(2,2)\|_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(y-2) - \frac{1}{16}(x-2)^2 + \frac{1}{16}(y-2)^2$$

$$+ o\left(\|(x,y)-(2,2)\|_2^2\right).$$

■

<u>10.2.</u> • <u>Vorüberlegung:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ Konvex und offen.
Sind $x, y \in U$, dann:

$$tx + (1-t)y \in U \quad \forall\, t \in [0,1]. \qquad (*)$$

Definieren $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto tx + (1-t)y$.

$\Rightarrow$ ψ ist stetig

$\Rightarrow$ $\psi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ ist offen und wegen $(*)$ ist

$$[0,1] \subset \psi^{-1}(U).$$

$\Rightarrow$ $\exists$ offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $[0,1] \subset J$ und

$$\psi(J) \subset U.$$

Wir definieren in dieser Situation: $g_{xy} := \psi|_J : J \to \mathbb{R}^n$.

Also haben wir gezeigt:

$\forall\, x, y \in U$ $\exists$ offenes Intervall $[0,1] \subset J \subset \mathbb{R}$, so dass

$$g_{xy} : J \to U, \; t \mapsto tx + (1-t)y \qquad (**)$$

wohldefiniert ist.

<u>Bemerkung zu $(**)$:</u> Der wesentliche Inhalt ist, dass wir das Intervall $[0,1]$ zu einem offenen Intervall vergrößern können, ohne dass die Bilder die Menge U verlassen. Die Offenheit des Intervalls ist für die Reduktion auf den eindimensionalen Fall erforderlich!

- Nach (**) ist für $x,y \in U$ die Abbildung

$$f \circ g_{xy} : J \to \mathbb{R}$$

jeweils wohldefiniert und offenbar 2-mal stetig differenzierbar. Für den späteren Gebrauch berechnen wir die zweite Ableitung:

$$(f \circ g_{xy})'(t) \overset{\text{Kettenregel}}{=} Df(g_{xy}(t)) \cdot Dg_{xy}(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx+(1-t)y) \cdot (x-y)_k \quad \leftarrow \text{k-te Komponente des Vektors } x-y$$

$$\Rightarrow (f \circ g_{xy})''(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(D\frac{\partial f}{\partial x_k}(tx+(1-t)y) \cdot (x-y) \right) \cdot (x-y)_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(tx+(1-t)y) \cdot (x-y)_j \right) \cdot (x-y)_k$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} (x-y)_j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(tx+(1-t)y) \cdot (x-y)_k$$

$$= (x-y)^t (\operatorname{Hess} f)(tx+(1-t)y)\,(x-y).$$

Also haben wir gezeigt:

$$(f \circ g_{xy})''(t) = (x-y)^t (\operatorname{Hess} f)(g_{xy}(t))\,(x-y) \quad \forall t \in J. \qquad (***)$$

Damit zur Aufgabe:

- „(i) ⇒ (ii)" Sei f konvex und $x \in U$ beliebig.

Zu zeigen: $(\operatorname{Hess} f)(x)$ ist positiv semidefinit.

Sei also $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir müssen

$$v^t \,(\mathrm{Hess}\, f)(x)\, v \geq 0$$

zeigen und Können $v \neq 0$ annehmen, da die Ungleichung für $v = 0$ trivial ist.

Da U offen ist, ist $U_\varepsilon(x) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$ geeignet.

Wir definieren

$$z := \frac{\varepsilon}{2\|v\|_2} \cdot v \quad \text{und} \quad y := x + z.$$

$\Rightarrow$ $y \in U_\varepsilon(x) \subset U$, denn $\|x-y\|_2 = \|z\|_2 = \frac{\varepsilon}{2\|v\|_2} \cdot \|v\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Wir Können also (**) auf $x, y \in U$ anwenden und erhalten ein offenes Intervall $[0,1] \subset J \subset \mathbb{R}$, so dass

$$g_{xy} : J \to U, \; t \mapsto tx + (1-t)y$$

wohldefiniert ist. Da f Konvex ist, ist auch $f \circ g_{xy}$ Konvex, denn: $s_1, s_2 \in J$ und $t \in [0,1]$. Dann:

$$f \circ g_{xy}(ts_1 + (1-t)s_2) = f\big((ts_1 + (1-t)s_2)x + (1 - (ts_1 + (1-t)s_2))y\big)$$

$$= f(ts_1 x + (1-t)s_2 x + y - ts_1 y - (1-t)s_2 y)$$

$$= f(ts_1 x + (1-t)s_2 x + ty + (1-t)y - ts_1 y - (1-t)s_2 y)$$

$$= f\big(t(s_1 x + y - s_1 y) + (1-t)(s_2 x + y - s_2 y)\big)$$

$$= f\big(t(s_1 x + (1-s_1)y) + (1-t)(s_2 x + (1-s_2)y)\big)$$

$$\overset{f \text{ Konvex}}{\leq} t f(s_1 x + (1-s_1)y) + (1-t) f(s_2 x + (1-s_2)y)$$

$= t\cdot(f\circ g_{xy})(s_1) + (1-t)\cdot(f\circ g_{xy})(s_2)$ ok.

Da $f\circ g_{xy}: J \to \mathbb{R}$ Konvex und J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist, folgt aus der Analysis I:

$$(f\circ g_{xy})''(t) \geq 0 \quad \forall t \in J.$$

Insbesondere folgt für $t=1$ $(\in J)$ aus (***):

$$\underbrace{(x-y)^t}_{=z} (\mathrm{Hess}\, f)(\underbrace{g_{xy}(1)}_{=x}) \underbrace{(x-y)}_{=z} = (f\circ g_{xy})''(1) \geq 0$$

d.h. $z^t (\mathrm{Hess}\, f)(x)\cdot z \geq 0$

Also folgt auch:

$$0 \leq \left(\frac{2\|v\|_2}{\varepsilon}\right)^2 z^t (\mathrm{Hess}\, f)(x)\, z = \left(\frac{2\|v\|_2}{\varepsilon}\cdot z\right)^t (\mathrm{Hess}\, f)(x) \left(\frac{2\|v\|_2}{\varepsilon}\cdot z\right)$$

$$= v^t (\mathrm{Hess}\, f)(x)\, v$$

Da $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig war, ist also $(\mathrm{Hess}\, f)(x)$ positiv semidefinit (für alle $x \in U$).

- „(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $(\mathrm{Hess}\, f)(z)$ positiv semidefinit für alle $z \in U$.

Seien außerdem $x, y \in U$ und $t \in [0,1]$. Zu zeigen:

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y).$$

Wir wenden (**) auf x, y an und erhalten

$$g_{xy}: J \to U,\ s \mapsto sx + (1-s)y.$$

Mit (***) folgt:

$$(f \circ g_{xy})''(s) = (x-y)^t \underbrace{(\mathrm{Hess}\, f)(g_{xy}(s))}_{\text{positiv semidefinit!}} (x-y) \geq 0 \quad \forall s \in J.$$

$\overset{\text{Analysis I}}{\Longrightarrow}$ $f \circ g_{xy}$ ist Konvex auf dem Intervall J.

Insbesondere folgt also wegen $0, 1 \in J$ und $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f \circ g_{xy}(t \cdot 1 + (1-t) \cdot 0) &\leq t (f \circ g_{xy})(1) + (1-t)(f \circ g_{xy})(0) \\ &= t f(x) + (1-t) f(y). \end{aligned}$$

Wegen

$$f \circ g_{xy}(t \cdot 1 + (1-t) \cdot 0) = f \circ g_{xy}(t) = f(tx + (1-t)y)$$

haben wir also

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

gezeigt, wie gewünscht. $\blacksquare$

10.3. Vorüberlegungen:

- Behauptung: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist indefinit, genau dann, wenn sie einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt. (*)

Denn:

A symmetrisch $\overset{\text{Lineare}}{\underset{\text{Algebra}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ von Eigenvektoren von A, d.h.

$$Av_i = \lambda_i v_i$$ und die $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte.

Ist $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dann schreiben wir:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$$ für geeignete $\mu_j \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen:

$$x^t A x = \langle x, Ax \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j , A\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k v_k\right)\right\rangle$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \mu_j \mu_k \langle v_j, Av_k \rangle$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \mu_j \mu_k \langle v_j, \lambda_k v_k \rangle$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \mu_j \mu_k \lambda_k \langle v_j, v_k \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j^2$$ da $v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasis ist.

- Ist A indefinit, dann gibt es $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x^t A x > 0 \quad \text{und} \quad y^t A y < 0.$$

Schreibe $x = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$, $y = \sum_{j=1}^{n} \tau_j v_j$, dann:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j^2 > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tau_j^2 < 0$$

$\lightning$ $\lambda_j \leq 0 \quad \forall\ 1 \leq j \leq n.$

$$\Rightarrow 0 \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j^2 > 0 \quad \lightning \quad \Rightarrow \lambda_{j_0} > 0 \text{ für min. ein } j_0$$

$\lightning$ $\lambda_j \geq 0 \quad \forall\ 1 \leq j \leq n$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tau_j^2 < 0 \quad \lightning \quad \Rightarrow \lambda_{j_1} < 0 \text{ für min ein } j_1.$$

Also: A indefinit $\Rightarrow$ A besitzt einen positiven und einen negativen Eigenwert.

- Besitze A umgekehrt einen positiven und einen negativen Eigenwert, z.B.

$$\lambda_{j_0} > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{j_1} < 0.$$

Definiere $x := v_{j_0}$ und $y := v_{j_1}$.

$$\Rightarrow x^t A x \overset{\text{s.o.}}{=} \lambda_{j_0} > 0 \quad \text{und} \quad y^t A y \overset{\text{s.o.}}{=} \lambda_{j_1} < 0$$

$\Rightarrow A$ ist indefinit.

ok.

• Behauptung: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten (mit Vielfachheit) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j. \qquad (**)$$

Denn:

A symmetrisch $\overset{\text{Lineare}}{\underset{\text{Algebra}}{\Longrightarrow}}$ A ist diagonalisierbar, d.h. $\exists\, S \in GL(n, \mathbb{R})$, so dass

$$S^{-1} A\, S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \det(S^{-1} A S) = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S$$

$$= \frac{1}{\det S} \cdot \det A \cdot \det S \quad = \det A. \qquad \text{ok.}$$

Damit zur Aufgabe:

(i) • Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A und A sei positiv definit.

$\overset{\text{VL}}{\Longrightarrow} \lambda_j > 0 \quad \forall\, 1 \leq j \leq n.$

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j > 0$, also insbesondere $\det A \neq 0$.

$\Rightarrow$ A ist invertierbar.

• Behauptung: Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ ist Eigenwert von } A^{-1}$$

Denn: λ Eigenwert von A

$\Leftrightarrow$ $Av = \lambda v$ für ein $v \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $v = A^{-1}(\lambda v)$ für ein $v \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $v = \lambda A^{-1} v$ für ein $v \neq 0$

$\overset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow}$ $A^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v$ für ein $v \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von A^{-1}

ok.

- Damit folgt: Die Eigenwerte von A^{-1} sind genau die

$$\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}.$$

Da alle $\lambda_j > 0$ sind, sind also alle Eigenwerte von A^{-1} positiv.

$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow}$ A^{-1} ist positiv definit.

- Ist A negativ definit $\Rightarrow B := -A$ ist positiv definit.

$\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow}$ $B \in GL(n, \mathbb{R})$ und B^{-1} ist positiv definit.

Wegen $(-B^{-1}) \cdot A = B^{-1}(-A) = B^{-1} \cdot B = E$ ist

$$A^{-1} = -B^{-1}$$ (insbesondere ist A invertierbar!).

Da B^{-1} positiv definit ist, ist $A^{-1} = -B^{-1}$ negativ definit. ok.

(ii) • Betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

$\Rightarrow$ A ist symmetrisch und wegen $(*)$ indefinit (denn: Die Eigenwerte von A sind $-1, 0$ und 1).

Wegen $\det A = 0 \cdot (-1) \cdot 1 = 0$ ist A aber nicht invertierbar.

- Ist $A = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, dann ist A stets eine Diagonalmatrix und folglich a der einzige Eigenwert von A.

  Wegen $(*)$ kann A nicht indefinit sein.

  $\Rightarrow$ In $\mathbb{R}^{1\times 1}$ gibt es keine indefiniten Matrizen!

- Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine indefinite Matrix, dann besitzt A wegen $(*)$ einen positiven und einen negativen Eigenwert.

  Da $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, besitzt A aber höchstens 2 Eigenwerte und folglich erhalten wir aus $(**)$:

$$\det A < 0 \quad \Rightarrow \quad A \in GL(2,\mathbb{R}).$$

  $\Rightarrow$ In $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist jede indefinite Matrix invertierbar!

(iii) • Sei $a \neq 0$. λ, μ seien die Eigenwerte von A.

Mit $(**)$: $\det A = \lambda \cdot \mu$.

- Falls $\det A > 0$ ist, folgt:

$$\begin{matrix} \lambda > 0 \\ \mu > 0 \end{matrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{matrix} \lambda < 0 \\ \mu < 0 \end{matrix}$$

d.h. A positiv definit oder A negativ definit (Vorlesung)

Wir berechnen:

$$e_1^t A e_1 = e_1^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a$$

Also: Falls $a > 0$ ist, muss A positiv definit sein, falls $a < 0$ ist, muss A negativ definit sein.

- Falls $\det A = 0$ ist, muss $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$ gelten.
$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow}$ A ist positiv semidefinit oder negativ semidefinit

  Wie eben ist $e_1^t A e_1 = a$ und damit:

  $a > 0 \Rightarrow A$ ist positiv semidefinit

  $a < 0 \Rightarrow A$ ist negativ semidefinit

- Falls $\det A < 0$ ist, muss ein Eigenwert positiv und einer negativ sein. Also ist A nach $(*)$ indefinit.

- Sei $a = 0$.
  - Falls $\det A < 0$ ist, ist A wie eben indefinit.
  - Sei also $\det A \geq 0$.

    $\Rightarrow \underbrace{ac}_{=0} - b^2 \geq 0 \Rightarrow -b^2 \geq 0$

    $\Rightarrow \det A = 0$, d.h. wie eben ist A positiv oder negativ semidefinit.

    Außerdem: $b = 0$, d.h. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Berechnen

    $$e_2^t A e_2 = e_2^t \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = c$$, also:

    $c > 0 \Rightarrow A$ positiv semidefinit

    $c < 0 \Rightarrow A$ negativ semidefinit.

$\blacksquare$

10.4. (i) • Berechnen zunächst:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\exp(xy) + 2x \,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\exp(xy) + 2\mu y$$

$$\Rightarrow \quad (\operatorname{grad} f)(x,y) = \big(y\exp(xy) + 2x \,,\; x\exp(xy) + 2\mu y\big)$$

Außerdem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = y^2 \exp(xy) + 2 \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = x^2 \exp(xy) + 2\mu$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \overset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \exp(xy) + xy\exp(xy) = (1+xy)\exp(xy).$$

$$\Rightarrow \quad (\operatorname{Hess} f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + y^2\exp(xy) & (1+xy)\exp(xy) \\ (1+xy)\exp(xy) & 2\mu + x^2\exp(xy) \end{pmatrix}$$

• Zunächst ist $(\operatorname{grad} f)(0,0) = (0,0)$, d.h. $(0,0)$ ist ein kritischer Punkt. Es ist

$$(\operatorname{Hess} f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\mu \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\big((\operatorname{Hess} f)(0,0)\big) = 4\mu - 1.$$

Also folgt:

$$\det\big((\operatorname{Hess} f)(0,0)\big) \begin{cases} = 0 & \text{falls } \mu = \frac{1}{4} \\ > 0 & \text{falls } \mu > \frac{1}{4} \\ < 0 & \text{falls } \mu < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Also: Die Hessematrix von f in $(0,0)$ ist positiv definit für $\mu > \frac{1}{4}$, indefinit für $\mu < \frac{1}{4}$ und positiv semidefinit für $\mu = \frac{1}{4}$ (ÜA 10.3.).

$\overset{VL}{\Rightarrow}$ Für $\mu > \frac{1}{4}$ besitzt f in $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum, für $0 < \mu < \frac{1}{4}$ besitzt f in $(0,0)$ kein Extremum.

Für $\mu = \frac{1}{4}$ liefert das hinreichende Kriterium keine Aussage, wir müssen also selbst abschätzen.

Dazu: $\exp(s) \geq 1+s \quad \forall s \in \mathbb{R}$ und Gleichheit gilt nur für $s=0$.

Denn: Wegen $\exp''(s) = \exp(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$ ist exp konvex.

Nach ÜA 2.3. gilt also

$$\exp(s) \geq \exp(0) + \exp'(0)(s-0) = 1+s \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

In $s=0$ gilt offenbar Gleichheit.

$\nearrow$ $\exp(t) = 1+t$ für ein $t \neq 0$. Mit dem Satz von Rolle existiert dann ein $\xi \neq 0$ mit $\exp(\xi) - 1 = 0$ $\lightning$ ok.

Damit berechnen wir im Fall $\mu = \frac{1}{4}$:

$$f(x,y) = \exp(xy) + x^2 + \left(\tfrac{1}{2}y\right)^2 = 1 + \left(x + \tfrac{1}{2}y\right)^2 + \left(\exp(xy) - 1 - xy\right)$$

$$> 1 + \left(x + \tfrac{1}{2}y\right)^2 \geq 1 = f(0,0) \qquad \text{für } xy \neq 0.$$

Falls $x = 0$, $y \neq 0$ gilt:

$$f(xy) = 1 + \left(\tfrac{1}{2}y\right)^2 > 1 = f(0,0)$$

Falls $x \neq 0$, $y = 0$ gilt:

$$f(x,y) = 1 + x^2 > 1 = f(0,0).$$

Also gilt in jedem Fall:

$f(x,y) \geq f(0,0)$ und Gleichheit gilt nur für $(x,y) = (0,0)$.

$\Rightarrow$ Im Fall $\mu = \frac{1}{4}$ besitzt f in $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum.

Damit haben wir also:

$$f \text{ besitzt in } (0,0) \begin{cases} \text{striktes lokales Minimum} & \text{falls } \mu \geq \frac{1}{4} \\ \text{Kein Extremum} & \text{falls } 0 < \mu < \frac{1}{4} \end{cases}.$$

- Wir suchen nach weiteren kritischen Punkten. Sei also $(x,y) \neq (0,0)$ und $(\operatorname{grad} f)(x,y) = (0,0)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \text{ d.h. } y\exp(xy) = -2x \Rightarrow xy\exp(xy) = -2x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \text{ d.h. } x\exp(xy) = -2\mu y \Rightarrow xy\exp(x,y) = -2\mu y^2. \qquad (*)$$

Also folgt notwendig: $-2x^2 = -2\mu y^2$, d.h. $x = \pm\sqrt{\mu}\, y$

Wegen $(*)$ kann „+" nicht als Vorzeichen auftreten

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\mu}\, y.$$

Wir erhalten nun aus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$:

$$y\exp(xy) = -2x, \text{ d.h. } y\exp(-\sqrt{\mu}\, y^2) = 2\sqrt{\mu}\, y$$

also wegen $y \neq 0$:

$$\exp(-\sqrt{\mu}\, y^2) = 2\sqrt{\mu} \qquad (**)$$

Da $-\sqrt{\mu}\, y^2 < 0$ ist, folgt notwendig $2\sqrt{\mu} < 1$, d.h. $\mu < \frac{1}{4}$.

Also: Für $\mu \geq \frac{1}{4}$ ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von f, also besitzt f in diesem Fall genau das eine strikte lokale Minimum in $(0,0)$.

- Wir lösen nun $(**)$ auf. Dazu sei für $0 < \mu < \frac{1}{4}$

$$\eta := \sqrt{-\left(\log(2\sqrt{\mu})\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}}$$

(wohldefiniert, da Log negativen Beitrag liefert)

Wir prüfen den Punkt $(-\sqrt{\mu}\,\eta, \eta) =: p$:

Es ist

$$\exp\left(-\sqrt{\mu}\,\eta \cdot \eta\right) = \exp\left(\sqrt{\mu}\left(\log(2\sqrt{\mu})\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) = 2\sqrt{\mu}.$$

Damit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(p) &= \eta \cdot 2\sqrt{\mu} - 2\sqrt{\mu}\,\eta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(p) &= -\sqrt{\mu}\,\eta \cdot 2\sqrt{\mu} + 2\mu\eta = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p \text{ kritischer Punkt.}$$

Die einzige weitere Lösung, welche sich aus $(**)$ ergibt ist $-\eta$. Sie führt also auf $-p$.

Wegen $\frac{\partial f}{\partial x}(-x,-y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(-x,-y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ist auch $-p$ ein kritischer Punkt.

Wir prüfen mit 10.3. die Definitheit der Hessematrix. Zunächst ist auch

$$(\mathrm{Hess}\, f)(-x,-y) = (\mathrm{Hess}\, f)(x,y),$$

es genügt also den Punkt p zu prüfen.

Es ist:

$$(\mathrm{Hess}\, f)(p) = \begin{pmatrix} 2+2\eta^2\sqrt{\mu} & (1-\sqrt{\mu}\,\eta^2)2\sqrt{\mu} \\ (1-\sqrt{\mu}\,\eta^2)2\sqrt{\mu} & 2\mu+2\mu\eta^2\sqrt{\mu} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\big((\mathrm{Hess}\, f)(p)\big) = (2+2\eta^2\sqrt{\mu})(2\mu+2\mu\eta^2\sqrt{\mu}) - \big((1-\sqrt{\mu}\,\eta^2)2\sqrt{\mu}\big)^2$$

$$= 4\mu + 4\mu\eta^2\sqrt{\mu} + 4\mu\eta^2\sqrt{\mu} + 4\mu^2\eta^4 - (1-2\sqrt{\mu}\,\eta^2+\mu\eta^4)4\mu$$

$$= 4\mu + 8\mu\eta^2\sqrt{\mu} + 4\mu^2\eta^4 - 4\mu + 8\mu\eta^2\sqrt{\mu} - 4\mu^2\eta^4$$

$$= 16\mu\eta^2\sqrt{\mu} \; > \; 0.$$

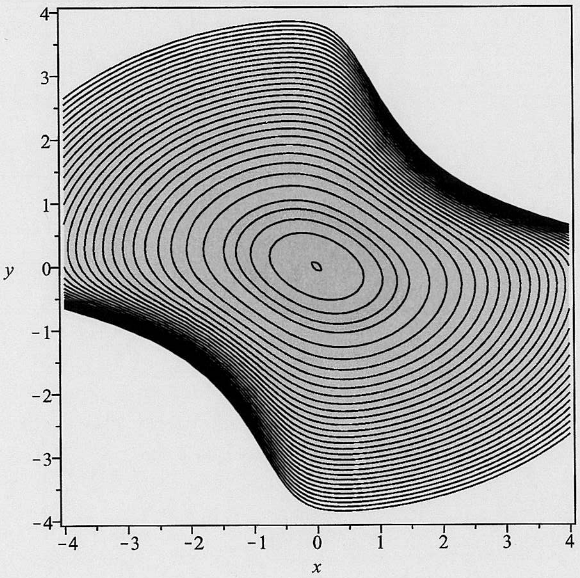
Da auch $2+2\eta^2\sqrt{\mu} > 0$ ist, ist die Hessematrix in p und $-p$ positiv definit.

$\Rightarrow$ Für $0<\mu<\frac{1}{4}$ besitzt f in $\pm(-\sqrt{\mu}\,\eta, \eta)$ jeweils ein striktes lokales Minimum (und das sind auch alle Extrema).

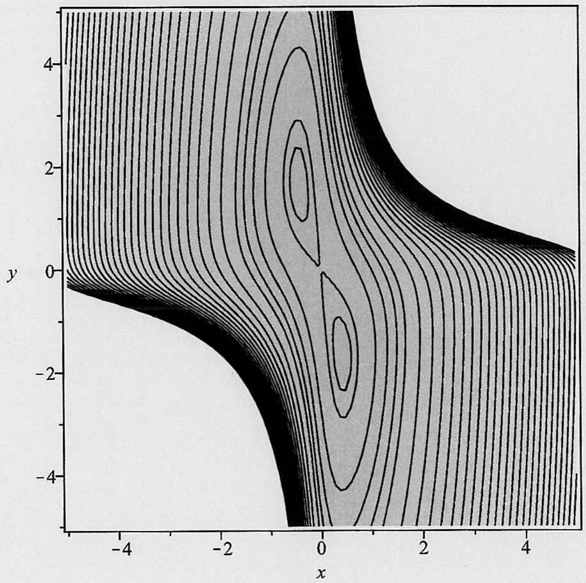
Zusammenfassung:

- Für $0<\mu<\frac{1}{4}$ besitzt f genau zwei strikte lokale Minima und zwar in den Punkten $\pm(-\sqrt{\mu}\,\eta, \eta)$ mit
$$\eta = \sqrt{-\big(\log(2-\sqrt{\mu})\big)\frac{1}{\sqrt{\mu}}}.$$
- Für $\mu \geq \frac{1}{4}$ besitzt f genau ein striktes lokales Minimum in $(0,0)$.
- f besitzt keine anderen Extrema.

Bemerkung: Wir beobachten in dieser Aufgabe ein interessantes Phänomen: Über ein großes Intervall $\mu \in [\frac{1}{4}, \infty)$ hinweg, besitzt die zu μ gehörige Funktion f nur ein Extremum, welches konstant im Punkt (0,0) liegt. Im Punkt $\mu = \frac{1}{4}$ spaltet sich dieses in zwei Extrema auf, die im Intervall $\mu \in (0, \frac{1}{4})$ existieren.
Ein solches Phänomen – dass sich interessante Punkte einer parameterabhängigen Funktion an bestimmten Parameterpunkten verzweigen – kann man in der Praxis häufig beobachten. Man bezeichnet es als Biforkation („Verzweigung").



Höhenlinien von f für $\mu = 2$



Höhenlinien von f für $\mu = \frac{1}{16}$

(ii) • <u>Bemerkung:</u> Man berechnet direkt, dass $(0,0)$ ein kritischer Punkt von g ist. Die Hessematrix im Punkt $(0,0)$ ist allerdings nur positiv semidefinit, so dass mit dem hinreichenden Kriterium aus der Vorlesung keine Aussage folgt!

• Wir berechnen:

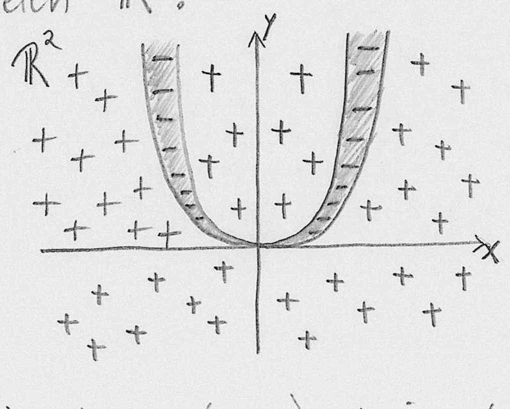
$$g(x,y) < 0 \iff (y-x^2)(y-2x^2) < 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} y-x^2 < 0 \\ y-2x^2 > 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} y-x^2 > 0 \\ y-2x^2 < 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} y < x^2 \\ y > 2x^2 \end{pmatrix}}_{\text{unmöglich}} \text{ oder } \begin{pmatrix} y > x^2 \\ y < 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$\iff x^2 < y < 2x^2$$

Es ergibt sich also folgendes Bild für das Vorzeichen von g im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$:



Auf den Parabelästen ist g gleich 0.

Damit zeigen wir, dass $(0,0)$ kein lokales Minimum von g ist. Sei dazu $V \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Umgebung von $(0,0)$.

$\Rightarrow U_\varepsilon((0,0)) \subset V$ für ein $\varepsilon > 0$ geeignet.

Wegen $g(0,0) = 0$ genügt es zu zeigen, dass es in $U_\varepsilon((0,0))$ einen Punkt gibt, in dem g negativ ist und einen Punkt, in dem g positiv ist.

Definiere für $n \in \mathbb{N}$: $a_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2n^2}\right) \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,0) \overset{\text{insb.}}{\Rightarrow} \exists\, m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \in U_\varepsilon((0,0))$.

Wegen
$$\left(\frac{1}{m}\right)^2 < \frac{3}{2m^2} < \frac{4}{2m^2} = 2\left(\frac{1}{m}\right)^2$$
ist $g(a_m) < 0$.

Andererseits ist $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \in U_\varepsilon((0,0))$ und wir berechnen
$$g\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$
ok.

Da die Umgebung V um $(0,0)$ beliebig war, folgt: $(0,0)$ ist kein lokales Minimum von g.

- Es ist:

$$g_{(a,b)}(t) = g(ta, tb) = (tb - (ta)^2)(tb - 2(ta)^2)$$
$$= t^2b^2 - 2t^3ba^2 - t^3a^2b + 2t^4a^4$$
$$= 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$$
$$g'_{(a,b)}(t) = 8a^4t^3 - 9a^2bt^2 + 2b^2t$$
$$g''_{(a,b)}(t) = 24a^4t^2 - 18a^2bt + 2b^2$$

Also: $g'_{(a,b)}(0) = 0$, $g''_{(a,b)}(0) = 2b^2$.

Falls also $b \neq 0$ ist, ist $g''_{(a,b)}(0) > 0$ und 0 nach Analysis I also ein striktes lokales Minimum von $g_{(a,b)}$.

Falls $b = 0$ ist, erhalten wir

$g_{(a,0)}(t) = 2a^4t^4 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ mit Gleichheit nur für $t = 0$.

Also ist 0 auch in diesem Fall ein striktes lokales Minimum von $g_{(a,b)}$ $\overset{\nabla}{.}$

$\blacksquare$