Analysis II, WiSe 2012 \ 2013 – Lösung Blatt 11

11.1. Wir schreiben das Gleichungssystem mit

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) + y^2 + z \\ x^2 + y\exp(z) \end{pmatrix}$$

in der Form $F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 0$.

Offenbar ist F stetig differenzierbar und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Gleichungssystems. Wir berechnen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2y \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \exp(z) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\exp(z)$$

Also:

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} 2y & 1 \\ \exp(z) & y\exp(z) \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist

$$\det\left(\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar.}$$

Wir können also den Satz über implizite Funktionen anwenden und erhalten eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von 0 sowie eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^2$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$g: U \to V$$

mit $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$ für $x \in U$, $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in V$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = g(x) \qquad (*)$$

Da V offene Umgebung von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subset V$. Als stetig differenzierbare Abbildung ist g insbesondere stetig.

$\Rightarrow \; g^{-1}\left(U_\delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \subset U$ offene Umgebung um 0.

$\Rightarrow \; \exists \; \varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) = U_\varepsilon(0) \subset g^{-1}\left(U_\delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$.

Schreiben wir $g(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$, dann haben wir wegen $(*)$ zu jedem $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ genau eine Lösung des Gleichungssystems, welche durch

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = g(x) \in U_\delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

gegeben wird.

$\blacksquare$

11.2. • Für einen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Polynom

$$p_{(x,y)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_{(x,y)}(z) = z^3 + z + xy - 1.$$

Als Polynom vom Grad 3 besitzt es 3 Nullstellen in $\mathbb{C}$, von denen mindestens eine reell ist.

$\nearrow$ $p_{(x,y)}$ besitze mindestens 2 verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$.

$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ $p'_{(x,y)}$ besitzt eine Nullstelle.

Aber: $p'_{(x,y)}(z) = 3z^2 + 1 > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$ $\lightning$

$\Rightarrow$ $p_{(x,y)}$ besitzt genau eine reelle Nullstelle (ohne Vielfachheit)

Also: Für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt die Gleichung

$$z^3 + z + xy = 1$$

genau eine reelle Lösung $z =: g(x,y)$. Wir erhalten also eine Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

• Wir zeigen, dass g zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Dazu schreiben wir die Gleichung mit

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x,y,z) := z^3 + z + xy - 1$$

in der Form $F(x,y,z) = 0$. Ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, dann löst $g(x,y)$ die Gleichung, d.h. es ist

$$F(x,y,g(x,y)) = 0.$$

Wegen $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \left(3z^2+1\right) \neq 0$ ist die Matrix $\frac{\partial F}{\partial z}$ im Punkt $(x,y,g(x,y))$ invertierbar und der Satz über implizite Funktionen daher anwendbar.

Er liefert die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung auf einer kleinen Umgebung um (x,y) durch eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion (da F zweimal stetig partiell differenzierbar ist).

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung und da g selbst eine Lösung ist, folgt:

g ist auf einer kleinen Umgebung um (x,y) zweimal stetig partiell differenzierbar.

Da $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig war, folgt:

g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

- Insbesondere liefert der Satz über implizite Funktionen:

$$\operatorname{grad} g(x,y) = Dg(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y,g(x,y))$$

$$= -\frac{1}{3g(x,y)^2+1}\begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$$

Also:

$$\operatorname{grad} g(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist der einzige kritische Punkt von g.

Wir berechnen die Hessematrix:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{3g(x,y)^2+1}\right) = \frac{6y \cdot g(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\left(3g(x,y)^2+1\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{3g(x,y)^2+1}\right) = \frac{6x \cdot g(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{\left(3g(x,y)^2+1\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{3g(x,y)^2+1}\right) = \frac{-3g(x,y)^2-1+6y \cdot g(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{\left(3g(x,y)^2+1\right)^2}$$

Damit:

$$\operatorname{Hess} g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3g(0,0)^2-1}{(3g(0,0)^2+1)^2} \\ \frac{-3g(0,0)^2-1}{(3g(0,0)^2+1)^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

mit $c = \frac{-3g(0,0)^2-1}{(3g(0,0)^2+1)^2}$.

Wegen $g(0,0)^2 \geq 0$

ist $g(0,0) \neq -\frac{1}{3}$ und damit $c \neq 0$.

$\Rightarrow$ $\det \operatorname{Hess} g(0,0) = -c^2 < 0$

$\overset{\text{ÜA B.10.3.}}{\Rightarrow}$ $\operatorname{Hess} g(0,0)$ ist indefinit

$\overset{\text{Vorlesung}}{\Rightarrow}$ g besitzt in $(0,0)$ Kein lokales Extremum.

Also besitzt g überhaupt Kein lokales Extremum!

$\blacksquare$

11.3. (i) • Zunächst ist f offenbar stetig partiell differenzierbar mit:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \exp(x)\cos(y) \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\exp(x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \exp(x)\sin(y) \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \exp(x)\cos(y)$$

Die Jakobimatrix von f ist demnach

$$Df\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos(y) & -\exp(x)\sin(y) \\ \exp(x)\sin(y) & \exp(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} \det Df\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= \exp^2(x)\cos^2(y) + \exp^2(x)\sin^2(y) \\ &= \exp^2(x)\left(\cos^2(y) + \sin^2(y)\right) \\ &= \exp^2(x) \quad > 0 \quad \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $Df\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ ist in allen Punkten $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ invertierbar.

• Ist nun $p \in \mathbb{R}^2$ beliebig, dann existiert nach dem Satz über die Umkehrfunktion eine offene Umgebung U von p sowie eine offene Umgebung V um $f(p)$, so dass $f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

$\Rightarrow$ f ist ein lokaler Diffeomorphismus.

- Insgesamt ist f jedoch kein Diffeomorphismus, denn wegen

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\2\pi\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ist f nicht injektiv, also auch nicht bijektiv, d.h. f^{-1} existiert nicht einmal als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$!

Wir sehen also: Aus der lokalen Umkehrbarkeit um jeden Punkt folgt <u>nicht</u> die globale Umkehrbarkeit.

(ii) Sei $V \subset U$ offen und $q \in f(V)$.

$\Rightarrow \exists\, p \in V$ mit $f(p) = q$.

Da nach Voraussetzung $Df(p)$ invertierbar ist, können wir den Satz über die Umkehrfunktion anwenden.

$\Rightarrow \exists$ offene Umgebung $W \subset U$ von p und offene Umgebung $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ von q, so dass

$$f|_W : W \to \tilde{W}$$

ein Diffeomorphismus und damit insbesondere ein Homöomorphismus ist. Da $W \cap V \subset W$ offen ist, und $p \in W \cap V$ gilt, ist

$$M_q := f|_W(W \cap V) = f(W \cap V) \text{ offen mit } q \in M_q \text{ und } M_q \subset f(V).$$

$\Rightarrow f(V) = \bigcup_{q \in f(V)} M_q$ ist offen als Vereinigung offener Mengen. $\blacksquare$

11.4. • Da $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, ist die Funktion

$$\operatorname{grad} f: U \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)^t$$

stetig partiell differenzierbar. Zur Abkürzung sei $g := \operatorname{grad} f$.
Für das totale Differential von g berechnen wir:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) \overset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).$$

$$\Rightarrow \quad Dg(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{i,j} = \operatorname{Hess} f(p).$$

• Sei nun $x \in U$ ein nichtausgearteter, kritischer Punkt von f.

x kritisch $\Rightarrow$ $g(x) = \operatorname{grad} f(x) = 0$. $\quad (*)$

x nichtausgeartet $\Rightarrow$ $\det Dg(x) = \det \operatorname{Hess} f(x) \neq 0$, d.h. $Dg(x)$ ist invertierbar.

$\Rightarrow$ Wir können den Satz über die Umkehrfunktion im Punkt x auf g anwenden

$\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $V \subset U$ von x und offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ von 0 mit $g|_V: V \to W$ ist ein Diffeomorphismus.

$\Rightarrow$ Insbesondere ist $g|_V: V \to W$ also bijektiv, d.h. wegen

$0 \in W$, $g(x) \overset{(*)}{=} 0$ und $x \in V$ folgt:

$$g(y) \neq 0 \quad \forall\, y \in V \setminus \{x\}$$

$\Rightarrow$ $V \subset U$ ist eine offene Umgebung von x mit

$$\operatorname{grad} f(y) = g(y) \neq 0 \quad \forall\, y \in V \setminus \{x\},$$

d.h. in V ist x der einzige kritische Punkt von f. $\blacksquare$