Analysis II, WiSe 2012\2013 – Lösung Blatt 12

12.1. • Wir berechnen die ersten drei Schritte des Iterationsverfahrens von Picard-Lindelöf:

$$\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Konstante Funktion)}$$

Allgemein ist:

$$\varphi_k(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x f(t, \varphi_{k-1}(t))\,dt$$

in dieser Situation

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \varphi_{k-1}(t)\,dt$$

Damit berechnen wir:

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^2 x \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^2 t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \mu^2 t \\ \mu^2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu^2 \begin{pmatrix} x^2/2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mu^2 \frac{x^2}{2} \\ \mu^2 x \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \mu^2 \frac{t^2}{2} \\ \mu^2 t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \mu^2 t \\ \mu^2 + \mu^4 \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu^2 \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x + \frac{\mu^2}{6} x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mu^2 \frac{x^2}{2} \\ \mu^2 x + \frac{\mu^4 x^3}{6} \end{pmatrix}$$

Wir fassen in einer einheitlicheren Schreibweise zusammen:

$$\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu(\mu x) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\mu x)^2}{2!} \\ \mu(\mu x) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\mu x)^2}{2!} \\ \mu\left(\mu x + \frac{(\mu x)^3}{3!}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\mu x)^0}{0!} + \frac{(\mu x)^2}{2!} \\ \mu\left(\frac{(\mu x)^1}{1!} + \frac{(\mu x)^3}{3!}\right) \end{pmatrix}$$

- Dies führt uns zu folgender Behauptung:

$\forall n \in \mathbb{N}$ ist

$$\varphi_{2n}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2j}}{(2j)!} \\ \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu x)^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Wir beweisen $(*)$ durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n=0$.

Wir erhalten aus $(*)$ die Behauptung $\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also ist der Induktionsanfang richtig (siehe oben!).

Induktionsschritt: „$n \to n+1$"

Wir müssen ausgehend von φ_{2n} zwei Iterationen des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens durchführen um zu $\varphi_{2(n+1)}$ zu gelangen.

$$\varphi_{2n+1}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \varphi_{2n}(t)\, dt$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu t)^{2j-1}}{(2j-1)!} \\ \mu^2 \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu t)^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu x)^{2j}}{\mu 2j (2j-1)!} \\ \mu^2 \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2j+1}}{\mu (2j+1)(2j)!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mu x)^{2j}}{(2j)!} \\ \mu \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2j+1}}{(2j+1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2j}}{(2j)!} \\ \mu \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2j+1}}{(2j+1)!} \end{pmatrix}$$

Damit können wir die zweite Iteration berechnen:

$$\varphi_{2(n+1)}(x) = \varphi_{2n+2}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \varphi_{2n+1}(t)\, dt$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \mu \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu t)^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ \mu^2 \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu t)^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2j+2}}{\mu(2j+2)(2j+1)!} \\ \mu^2 \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2j+1}}{\mu(2j+1)(2j)!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2(j+1)}}{(2(j+1))!} \\ \mu \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mu x)^{2(j+1)-1}}{(2(j+1)-1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(\mu x)^{2j}}{(2j)!} \\ \mu \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(\mu x)^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(\mu x)^{2j}}{(2j)!} \\ \mu \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(\mu x)^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{pmatrix} \qquad \text{ok}$$

Damit ist die Formel (*) nachgewiesen.

- Da wir aus der Vorlesung wissen, dass die Iteration gegen eine Lösung

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$$

des Anfangswertproblems konvergiert (auf kleiner Umgebung um 0), gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{2n} = \varphi \qquad \text{(da Teilfolge)}$$

und damit folgt für die Lösung φ:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^{2j}}{(2j)!} \\ \mu \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\mu x)^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\mu x) \\ \mu \cdot \sinh(\mu x) \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

12.2. (i) • Es sei

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x)$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \exp(y).$$

Da sich die Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

mit $g(y) = \exp(y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ schreiben lässt, liegt eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen vor.

• Wir versuchen, diese mit dem Verfahren aus der Vorlesung zu lösen und definieren:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \cos(t)\,dt$$

$$= \sin(x) - \sin(x_0).$$

$$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\exp(t)}\,dt$$

$$= \int_{y_0}^{y} \exp(-t)\,dt = \left(-\exp(-t)\right)\Big|_{y_0}^{y}$$

$$= \exp(-y_0) - \exp(-y)$$

Wegen $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ ist zunächst

$G(\mathbb{R}) = (-\infty, \exp(-y_0))$.

Wegen $\exp(-y_0) > 0$ und $F(x_0) = 0$ ist

$$F(x_0) \in G(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \text{ offen.}$$

Es gibt also eine kleine Umgebung J um x_0 mit

$$F(J) \subset G(\mathbb{R})$$

Nach Vorlesung existiert daher auf J genau eine Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}$ des vorgelegten Anfangswertproblems und diese genügt der Gleichung

$$G(\varphi(x)) = F(x) \qquad \forall x \in J.$$

Wir berechnen also:

$$G(\varphi(x)) = F(x)$$

$$\Leftrightarrow \exp(-y_0) - \exp(-\varphi(x)) = \sin(x) - \sin(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \exp(-\varphi(x)) = \exp(-y_0) + \sin(x_0) - \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -\varphi(x) = \ln\left(\exp(-y_0) + \sin(x_0) - \sin(x)\right)$$

Also ist

$$\varphi(x) = -\ln\left(\exp(-y_0) + \sin(x_0) - \sin(x)\right)$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf J (was man auch mit einer „Probe" überprüfen kann).

- Sei nun $y_0 = 0$. Wir suchen abhängig von x_0 das maximale Existenzintervall dieser Lösung, d.h. das größtmögliche Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit

$$x_0 \in J \quad \text{sowie} \quad F(J) \subset G(\mathbb{R}) = (-\infty, \exp(-y_0)).$$

Wir fragen also für welche $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\sin(x) - \sin(x_0) < \exp(-y_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin(x) < \exp(-y_0) + \sin(x_0)$$

$$\overset{y_0=0}{\Longleftrightarrow} \quad \sin(x) < 1 + \sin(x_0)$$

gilt.

- Ist $x_0 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, dann ist $\sin(x_0) > 0$ und damit

$$\sin(x) < 1 + \sin(x_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{erfüllt}.$$

$\Rightarrow$ $J = \mathbb{R}$ ist das maximale Existenzintervall

- Ist $x_0 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$ dann ist $\sin(x_0) \leq 0$.

Also haben wir

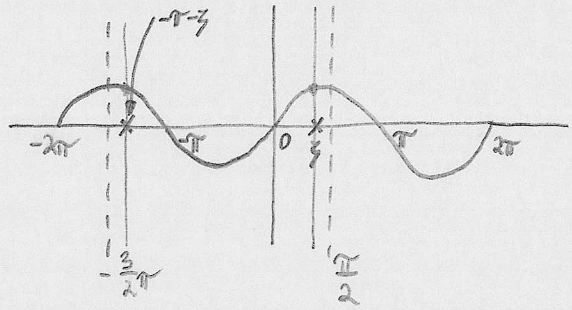
$$0 \leq 1 + \sin(x_0) \leq 1$$

d.h. $\xi := \arcsin(1 + \sin(x_0)) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist wohldefiniert und es gilt die gewünschte Gleichung im Intervall $(-\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

genau für

$$x \in \left(-(\pi+\xi), \xi\right).$$

Veranschaulichung:



Also:

$$\sin(x) < 1 + \sin(x_0) \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left((2k-1)\pi - \xi, 2k\pi + \xi\right)$$

Da die Ungleichung für x_0 erfüllt ist, gibt es genau ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ mit

$$x_0 \in \left((2k_0-1)\pi - \xi, 2k_0\pi + \xi\right).$$

$$\Rightarrow \quad J = \left((2k_0-1)\pi - \arcsin(1+\sin(x_0)), 2k_0\pi + \arcsin(1+\sin(x_0))\right)$$

ist in diesem Fall das maximale Existenzintervall der Lösung φ.

(ii) Es handelt sich um ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wir müssen also die Eigenwerte von

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

sowie – falls möglich – eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A berechnen.

- Bestimmen das charakteristische Polynom:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Laplace nach 1. Zeile

$$\overset{\text{Laplace nach 1. Zeile}}{=} (\lambda-3)\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & \lambda-1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-1)\lambda + 2(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\left((\lambda-3)\lambda + 2\right)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1$ (Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = 2$ (Vielfachheit 1).

- Bestimmen Basen der Eigenräume von A:

<u>$\lambda_1 = 1$:</u>

$$1\cdot E - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E(1) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda_2 = 2$:

$$2 \cdot E - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ + \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E(2) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Also: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $1, 1, 2$ (Lineare Algebra I).

$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow}$ Die Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi_1(x) = \exp(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi_2(x) = \exp(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi_3(x) = \exp(2x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein Lösungs-Fundamentalsystem der vorgelegten Differentialgleichung.

$\blacksquare$

12.3. (i) • Wir berechnen die Ableitungen von

$$z = \sqrt{x}\, y$$

nach x wobei y eine von x abhängige Funktion sei.

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{x}} y + \sqrt{x}\, y'$$

$$z'' = \frac{2\sqrt{x}\, y' - \frac{1}{\sqrt{x}} y}{4x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} y' + \sqrt{x}\, y'' \qquad \left(\text{beachte: } x \in (0,\infty)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2x} y' - \frac{1}{4x\sqrt{x}} y + \frac{\sqrt{x}}{2x} y' + \sqrt{x}\, y''$$

$$= \sqrt{x}\left(y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{4x^2} y\right) \qquad (*)$$

$$= \sqrt{x}\left(y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y\right) - \sqrt{x}\, y$$

$$= \sqrt{x}\left(y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y\right) - z$$

Da $\sqrt{x} > 0$ stets gilt, erhalten wir:

y ist Lösung der Besselschen Differentialgleichung zu $p = \frac{1}{2}$

$$\Longleftrightarrow \quad y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0$$

$$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad z = \sqrt{x}\, y \text{ ist Lösung der Differentialgleichung}$$

$$z'' = -z \qquad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}$$

• Offenbar haben wir mit

$\psi_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \psi_1(x) = \cos(x)$

$\psi_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \psi_2(x) = \sin(x)$

zwei Lösungen von $z'' = -z$ auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ gefunden.

$\Rightarrow \quad \varphi_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$

$\varphi_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

sind zwei Lösungen der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung $p = \frac{1}{2}$. Da es sich hierbei um eine (gewöhnliche) Differentialgleichung 2. Ordnung handelt und die Funktionen φ_1, φ_2 offenbar linear unabhängig sind, ist

$$\{\varphi_1, \varphi_2\}$$

ein Lösungs-Fundamentalsystem.

(ii) • Da die Abbildungen $f \mapsto f'$ sowie $f \mapsto f''$ nach Analysis I $\mathbb{R}$-linear sind, sind T_p, S_p und B_p offenbar linear. Wir verifizieren die Identitäten:

• $T_{p+1}(S_p f) = T_{p+1}\left(-f'(x) + \frac{p}{x} f(x)\right)$

$= -f''(x) - \frac{p}{x^2} f(x) + \frac{p}{x} f'(x) + \frac{p+1}{x}\left(-f'(x) + \frac{p}{x} f(x)\right)$

$= -f''(x) - \left(\frac{p}{x^2} - \frac{(p+1)p}{x^2}\right) f(x) - \left(\frac{p+1}{x} - \frac{p}{x}\right) f'(x)$

$= -f''(x) - \left(\frac{-p^2}{x^2}\right) f(x) - \frac{1}{x} f'(x)$

$$= f(x) - \left(f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) f(x)\right)$$

$$= f(x) - B_p f(x) \qquad \Rightarrow \text{(1) gilt.}$$

- $$S_{p-1}(T_p f) = S_{p-1}\left(f'(x) + \frac{p}{x} f(x)\right)$$

$$= -f''(x) + \frac{p}{x^2} f(x) - \frac{p}{x} f'(x) + \frac{p-1}{x}\left(f'(x) + \frac{p}{x} f(x)\right)$$

$$= -f''(x) - \frac{1}{x}\left(p - (p-1)\right) f'(x) + \left(\frac{p}{x^2} + \frac{(p-1)p}{x^2}\right) f(x)$$

$$= -f''(x) - \frac{1}{x} f'(x) - \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) f(x) + f(x)$$

$$= f(x) - B_p f(x) \qquad \Rightarrow \text{(2) gilt.}$$

- $$T_p(B_p f) = T_p\left(f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) f(x)\right)$$

$$= f'''(x) - \frac{1}{x^2} f'(x) + \frac{1}{x} f''(x) + f'(x) + \frac{2p^2}{x^3} f(x) - \frac{p^2}{x^2} f'(x)$$

$$+ \frac{p}{x}\left(f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) f(x)\right)$$

$$= f'''(x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{p}{x}\right) f''(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{p^2}{x^2} + \frac{p}{x^2}\right) f'(x) + \left(\frac{2p^2}{x^3} + \frac{p}{x} - \frac{p^3}{x^3}\right) f(x)$$

Andererseits berechnen wir:

$$B_{p-1}(T_p f) = B_{p-1}\left(f'(x) + \frac{p}{x} f(x)\right)$$

$$= f'''(x) + \frac{2p}{x^3} f(x) - \frac{p}{x^2} f'(x) - \frac{p}{x^2} f'(x) + \frac{p}{x} f''(x)$$

$$+ \frac{1}{x}\left(f''(x) - \frac{p}{x^2} f(x) + \frac{p}{x} f'(x)\right) + \left(1 - \frac{(p-1)^2}{x^2}\right)\left(f'(x) + \frac{p}{x} f(x)\right)$$

$$= f'''(x) + \left(\frac{p}{x} + \frac{1}{x}\right) f''(x) + \left(-\frac{2p}{x^2} + \frac{p}{x^2} + 1 - \frac{(p-1)^2}{x^2}\right) f'(x) + \left(\frac{2p}{x^3} - \frac{p}{x^3} + \frac{p}{x} - \frac{p(p-1)^2}{x^3}\right) f(x)$$

$$= f'''(x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{p}{x}\right) f''(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{p^2}{x^2} + \frac{p}{x^2}\right) f'(x) + \left(\frac{2p^2}{x^3} + \frac{p}{x} - \frac{p^3}{x}\right) f(x)$$

$$\Rightarrow \text{(3) gilt.}$$

- $S_p(B_p f) = S_p\left(f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)f(x)\right)$

$$= -f'''(x) + \frac{1}{x^2}f'(x) - \frac{1}{x}f''(x) - f'(x) - \frac{2p^2}{x^3}f(x) + \frac{p^2}{x^2}f'(x)$$
$$+ \frac{p}{x}\left(f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)f(x)\right)$$
$$= -f'''(x) + \left(\frac{p}{x} - \frac{1}{x}\right)f''(x) + \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{p^2}{x^2} + \frac{p}{x^2}\right)f'(x) + \left(\frac{p}{x} - \frac{p^3}{x^3} - \frac{2p^2}{x^3}\right)f(x)$$

Andererseits berechnen wir:

$$B_{p+1}(S_p f) = B_{p+1}\left(-f'(x) + \frac{p}{x}f(x)\right)$$
$$= -f'''(x) + \frac{2p}{x^3}f(x) - \frac{p}{x^2}f'(x) - \frac{p}{x^2}f'(x) + \frac{p}{x}f''(x)$$
$$+ \frac{1}{x}\left(-f''(x) - \frac{p}{x^2}f(x) + \frac{p}{x}f'(x)\right) + \left(1 - \frac{(p+1)^2}{x^2}\right)\left(-f'(x) + \frac{p}{x}f(x)\right)$$
$$= -f'''(x) + \left(\frac{p}{x} - \frac{1}{x}\right)f''(x) + \left(-\frac{2p}{x^2} + \frac{p}{x^2} - 1 + \frac{(p+1)^2}{x^2}\right)f'(x)$$
$$+ \left(\frac{2p}{x^3} - \frac{p}{x^3} + \frac{p}{x} - \frac{p(p+1)^2}{x^3}\right)f(x)$$
$$= -f'''(x) + \left(\frac{p}{x} - \frac{1}{x}\right)f''(x) + \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{p^2}{x^2} + \frac{p}{x^2}\right)f'(x) + \left(\frac{p}{x} - \frac{p^3}{x^3} - \frac{2p^2}{x^3}\right)f(x)$$

$\Rightarrow$ (4) gilt.

(iii) • Sei $f \in V_p$, d.h. $B_p f = 0$. Dann:

$$B_{p-1}(T_p f) \overset{(3)}{=} T_p(\underbrace{B_p f}_{=0}) = 0 \quad \Rightarrow T_p f \in V_{p-1}.$$

Also: $T_p(V_p) \subset V_{p-1}$

Außerdem:

$$B_{p+1}(S_p f) \overset{(4)}{=} S_p(\underbrace{B_p f}_{=0}) = 0 \quad \Rightarrow S_p f \in V_{p+1}$$

Also: $S_p(V_p) \subset V_{p+1}$ $\Rightarrow$ (1) gilt.

- Sei $f \in V_p$, d.h. $\mathcal{B}_p f = 0$. Dann:

$$T_{p+1}(S_p f) \overset{(1)}{=} id(f) - \mathcal{B}_p f = f$$

$$\Rightarrow T_{p+1} \circ S_p = id \text{ auf } V_p$$

Ist $f \in V_{p+1}$, d.h. $\mathcal{B}_{p+1} f = 0$, dann:

$$S_p(T_{p+1} f) \overset{(2)}{=} id(f) - \mathcal{B}_{p+1} f = f$$

$$\Rightarrow S_p \circ T_{p+1} = id \text{ auf } V_{p+1}.$$

$\Rightarrow$ T_{p+1} und S_p sind bijektiv und invers zueinander. (auf V_p)

$\overset{\text{Lineare}}{\underset{\text{Algebra}}{\Rightarrow}}$ Insbesondere sind T_{p+1} und S_p auf V_p bzw. V_{p+1} Isomorphismen

$\Rightarrow$ (2) gilt.

(iv) Es ist $V_p = \text{Kern}\, \mathcal{B}_p$ genau der Raum aller Lösungen der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung p.

$$\overset{(i)}{\Rightarrow} \quad V_{\frac{1}{2}} = \text{span}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{und } \{\varphi_1, \varphi_2\} \text{ ist Basis von } V_{\frac{1}{2}}.$$

Nach (iii) ist

$$S_{\frac{1}{2}} : V_{\frac{1}{2}} \to V_{\frac{1}{2}+1} = V_{\frac{3}{2}}$$

ein Isomorphismus, bildet also Basen auf Basen ab.

$$\Rightarrow V_{\frac{3}{2}} = \text{span}\left(S_{\frac{1}{2}} \varphi_1, S_{\frac{1}{2}} \varphi_2\right).$$

Wir berechnen:

- $S_{\frac{1}{2}} \varphi_1(x) = -\varphi_1'(x) + \frac{1}{2x}\varphi_1(x)$

$$= -\frac{-\sin(x)\sqrt{x} - \cos(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} + \frac{1}{2x} \cdot \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2x\sin(x) + \cos(x) + \cos(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x\sin(x) + \cos(x)}{x\sqrt{x}}$$

- $S_{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_2(x) = -\mathcal{C}_2'(x) + \frac{1}{2x} \mathcal{C}_2(x)$

$$= -\frac{\cos(x)\sqrt{x} - \sin(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} + \frac{1}{2x} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2x\cos(x) + \sin(x) + \sin(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{-x\cos(x) + \sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow$ Die Funktionen

$$S_{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad S_{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_1(x) = \frac{x\sin(x) + \cos(x)}{x\sqrt{x}}$$

$$S_{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad S_{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_2(x) = \frac{-x\cos(x) + \sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

bildet ein Lösungs-Fundamentalsystem der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung $p = \frac{3}{2}$.

$\blacksquare$

<u>Bemerkung:</u>

Die in (ii) und (iii) bereitgestellte „Algebra" ermöglicht es offenbar die Besselsche Differentialgleichung für alle Ordnungen

$$p = \frac{1}{2} + n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu lösen ...

12.4. • Formulierung als Anfangswertproblem:

Suchen $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$p(0) = 100$$

$$p'(t) = \mu(p(t) - b) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

wobei $\mu, b \in \mathbb{R}$ Parameter des Modells sind, welche $0 < b < 100$ und $\mu < 0$ („vergessen") erfüllen.

• Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung in der Dimension 1. Nach Vorlesung ist sie eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$ lösbar und die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch:

$$p(t) = p_0(t)\left(100 + \int_0^t \frac{-\mu b}{p_0(x)}\,dx\right)$$

mit $p_0(t) = \exp\left(\int_0^t \mu\,dx\right) = \exp(\mu t)$

Also:

$$p(t) = \exp(\mu t)\left(100 - \mu b \int_0^t \exp(-\mu x)\,dx\right)$$

$$= \exp(\mu t)\left(100 - \mu b \left(\frac{-1}{\mu}\exp(-\mu x)\right)\Big|_0^t\right)$$

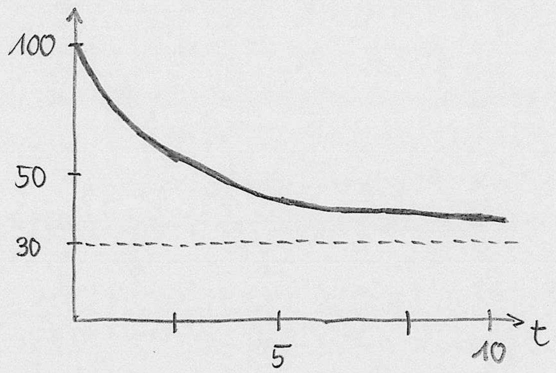
$$= \exp(\mu t)\left(100 + b\left(\exp(-\mu t) - \exp(0)\right)\right)$$

$$= 100\exp(\mu t) + b - b\exp(\mu t)$$

$$= (100 - b)\exp(\mu t) + b$$

$$\Rightarrow \quad p(t) = (100 - b)\exp(\mu t) + b \quad \text{ist Lösung.}$$

- Skizze für $b = 30$ und $\mu = -\frac{1}{3}$:



$\blacksquare$