Analysis II, WiSe 2012\2013 – Lösung Blatt 2

2.1. (i) • Es ist:

$$T_2[f,1](x) = \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzung}}{=} -1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad f(1) = -1, \quad f'(1) = 2, \quad f''(1) = 6$$

Außerdem:

$$T_2[g,0](x) = \frac{g(0)}{0!} + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzung}}{=} 1 - x + 5x^2$$

$$\Rightarrow \quad g(0) = 1, \quad g'(0) = -1, \quad g''(0) = 10$$

• Wir berechnen:

$$T_2[h,0](x) = \frac{h(0)}{0!} + \frac{h'(0)}{1!}x + \frac{h''(0)}{2!}x^2$$

$$h(0) = f(g(0)) = f(1) = -1$$

$$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) \quad \Rightarrow \quad h'(0) = f'(g(0))\cdot g'(0) = f'(1)\cdot(-1)$$

$$= -2$$

$$h''(x) = f''(g(x))\cdot(g'(x))^2 + f'(g(x))\cdot g''(x)$$

$$\Rightarrow h''(0) = f''(g(0))\cdot(g'(0))^2 + f'(g(0))\cdot g''(0)$$

$$= f''(1)\cdot(-1)^2 + f'(1)\cdot 10 = 6 + 2\cdot 10 = 26$$

Also erhalten wir

$$T_2[h,0](x) = \frac{-1}{1} + \frac{-2}{1}x + \frac{26}{2}x^2 = -1 - 2x + 13x^2.$$

(ii) • Zeigen per Induktion:

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist

$$\cos^{(4n)}(x) = \cos(x), \quad \cos^{(4n+1)}(x) = -\sin(x)$$
$$\cos^{(4n+2)}(x) = -\cos(x), \quad \cos^{(4n+3)}(x) = \sin(x) \qquad (*)$$

Induktionsanfang: $n=0$

$$\cos^{(0)}(x) = \cos(x), \quad \cos^{(1)}(x) = \cos'(x) \overset{\text{VL}}{=} -\sin(x)$$
$$\cos^{(2)}(x) = -\sin'(x) \overset{\text{VL}}{=} -\cos(x), \quad \cos^{(3)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x) \qquad \text{ok.}$$

Induktionsschritt: „$n \to n+1$"

$$\cos^{(4(n+1))}(x) = \cos^{(4n+4)}(x) = \cos^{((4n+3)+1)}(x) \overset{\text{I.V.}}{=} \sin'(x) = \cos(x)$$

Damit:

$$\cos^{(4(n+1)+1)}(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$$
$$\cos^{(4(n+1)+2)}(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$$
$$\cos^{(4(n+1)+3)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x) \qquad \text{ok.}$$

Also ist $(*)$ gezeigt.

• Aus $(*)$ folgt für $x=\pi$ insbesondere: $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist

$$\cos^{(4n)}(\pi) = \cos(\pi) = -1$$
$$\cos^{(4n+1)}(\pi) = -\sin(\pi) = 0$$
$$\cos^{(4n+2)}(\pi) = -\cos(\pi) = 1 \qquad (**)$$
$$\cos^{(4n+3)}(\pi) = \sin(\pi) = 0$$

Also erhalten wir als Taylorreihe:

$$T[\cos,\pi](x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\cos^{(K)}(\pi)}{K!}(x-\pi)^K \underset{\substack{\uparrow \\ \cos^{(K)}(\pi)=0 \\ \text{für } K \text{ ungerade, vgl. } (**)}}{=} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\cos^{(2K)}(\pi)}{(2K)!}(x-\pi)^{2K}$$

Da wegen $(**)$ außerdem

$$\cos^{(2K)}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } K \text{ ungerade} \\ -1 & \text{falls } K \text{ gerade} \end{cases}$$

$$= (-1)^{K+1}$$

gilt, erhalten wir:

$$T[\cos,\pi](x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^{K+1}}{(2K)!}(x-\pi)^{2K}$$

- Konvergenz der Taylorreihe: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

  Ist $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es nach Lagrange ein $\eta \in \mathbb{R}$ (zwischen π und x) mit

$$\cos(x) = T_{2n}[\cos,\pi](x) + \frac{\cos^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1}$$

$$= \sum_{K=0}^{n} \frac{(-1)^{K+1}}{(2K)!}(x-\pi)^{2K} + \frac{\cos^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1}$$

Also:

$$\left| \cos(x) - \sum_{K=0}^{n} \frac{(-1)^{K+1}}{(2K)!}(x-\pi)^{2K} \right| = \left| \frac{\cos^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1} \right|$$

$$= \frac{|\cos^{(2n+1)}(\eta)|}{(2n+1)!} |x-\pi|^{2n+1} \overset{(**)}{=} \frac{|\sin(\eta)|}{(2n+1)!} |x-\pi|^{2n+1}$$

$$\overset{|\sin(\eta)|\leq 1}{\leq} \frac{|x-\pi|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Also haben wir

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (x-\pi)^{2k} \right| \leq \frac{|x-\pi|^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da die Exponentialreihe für $|x-\pi|$ konvergiert, ist

$\left(\frac{|x-\pi|^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|x-\pi|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left| \frac{|x-\pi|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

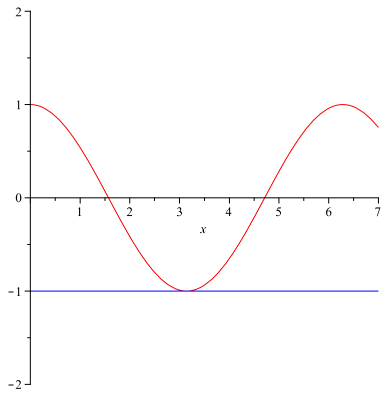
Also ist

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (x-\pi)^{2k} \right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

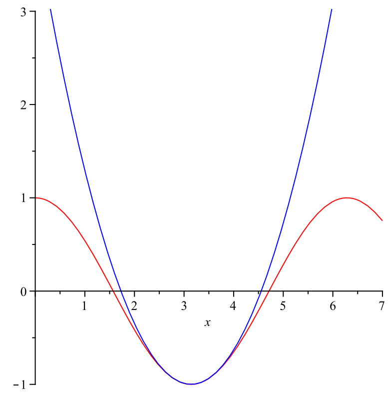
$$\Rightarrow \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (x-\pi)^{2k} \qquad \text{(die Reihe konvergiert)}$$

Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig war, konvergiert $T[\cos, \pi]$ also auf ganz $\mathbb{R}$ gegen cos.

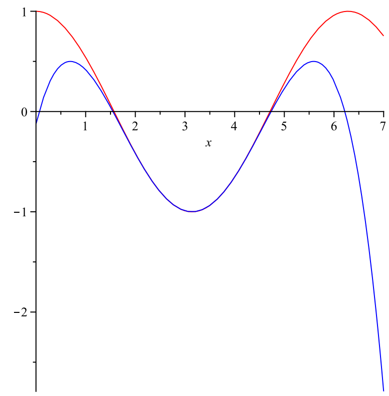
Darstellung einiger Taylorpolynome aus der Entwicklung von $\cos(x)$ um den Entwicklungspunkt π:



$T_0[\cos,\pi](x) = T_1[\cos,\pi](x) = -1$

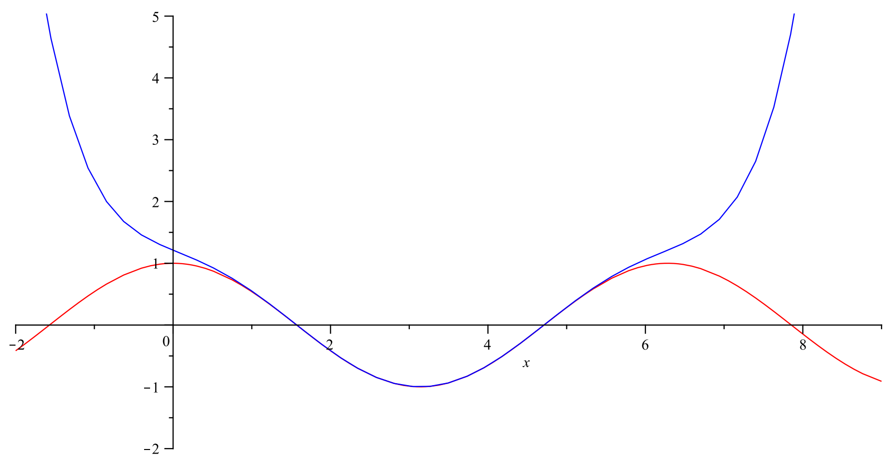


$T_2[\cos,\pi](x) = T_3[\cos,\pi](x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2$

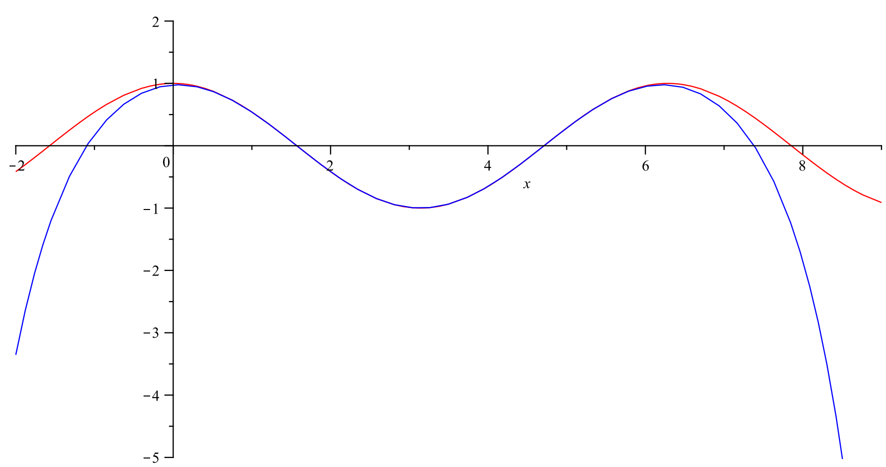


$T_4[\cos,\pi](x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4$

Taylorpolynom der Ordnung 6: $T_6[\cos,\pi](x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 + \frac{1}{720}(x-\pi)^6$



Taylorpolynom der Ordnung 8: $T_8[\cos,\pi](x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 + \frac{1}{720}(x-\pi)^6 - \frac{1}{40320}(x-\pi)^8$



2.2. • Sei f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

$\Rightarrow$ Nach Vorlesung ist f beliebig oft differenzierbar, also insbesondere mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar.

Schreibe $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad$ für geeignete $a_k \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k x^{k-1}$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n \quad \Rightarrow \quad f^{(n+1)}(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad$ ok.

• Sei nun f mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar mit $f^{(n+1)}(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Wir wenden den Satz von Lagrange im Punkt 0 an.

$\Rightarrow \exists\, \eta \in \mathbb{R}$ (zwischen 0 und x) mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\overset{f^{(n+1)}(\eta)=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$\Rightarrow f$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$. ok.

∎

2.3. • Sei f konvex.

$\Rightarrow$ Nach Vorlesung ist $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$.

Seien nun $x, y \in (a,b)$ fixiert. Wir wenden den Satz von Lagrange im Punkt x an.

$\Rightarrow \exists\, \eta \in \mathbb{R}$ (zwischen x und y) mit

$$f(y) = \frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}(y-x) + \underbrace{\frac{f''(\eta)}{2!}}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)^2}_{\geq 0}$$

$$\geq f(x) + f'(x)(y-x) \quad .$$

Da x und y beliebig waren, ist die erforderliche Gleichung für alle $x, y \in (a,b)$ nachgewiesen. ok.

• Gelte nun $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \quad \forall\, x,y \in (a,b)$. $(*)$

Wir fixieren $x, y \in (a,b)$ sowie $\lambda \in (0,1)$. Zu zeigen:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Dazu sei $z := \lambda x + (1-\lambda)y \in (a,b)$.

$(*)$ mit x und z $\Rightarrow f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z)$

$(*)$ mit y und z $\Rightarrow f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z)$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit λ und die zweite mit $(1-\lambda)$ und erhalten:

$$\lambda f(x) \geq \lambda f(z) + \lambda f'(z)(x-z)$$

$$(1-\lambda) f(y) \geq (1-\lambda) f(z) + (1-\lambda) f'(z)(y-z)$$

Addition ergibt:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq \lambda f(z) + (1-\lambda) f(z) + \lambda f'(z)(x-z) + (1-\lambda) f'(z)(y-z)$$

$$= f(z) + f'(z)\left(\lambda x - \lambda z + (1-\lambda) y - (1-\lambda) z\right)$$

$$= f(z) + f'(z)\left(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{= z} - z\right)$$

$$= f(z).$$

Also:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

Also ist die definierende Gleichung für Konvexität für alle $x, y \in (a,b)$ nachgewiesen.

$\Rightarrow$ f ist Konvex.

ok.

$\blacksquare$

2.4. (i) Wir rechnen nach, dass d_d die Axiome einer Metrik erfüllt:

- $d_d(p,q) = 0 \iff p = q$ gilt nach Definition von d_d.

- Symmetrie: Seien $p, q \in M$.

  Falls $d_d(p,q) = 0$ gilt, ist $p = q$. In diesem Fall:

  $$d_d(q,p) \overset{q=p}{=} 0 \overset{p=q}{=} d_d(p,q) \quad \text{ok.}$$

  Falls $d_d(p,q) \neq 0$ gilt, ist $p \neq q$. In diesem Fall:

  $$d_d(q,p) \overset{q \neq p}{=} 1 \overset{p \neq q}{=} d_d(p,q) \quad \text{ok.}$$

  Also gilt in jedem Fall $d_d(p,q) = d_d(q,p)$.

- Dreiecksungleichung: Seien $p, q, r \in M$.

  Falls $p = q$ gilt, ist

  $$d_d(p,q) = 0 \leq \underbrace{d_d(p,r)}_{\geq 0} + \underbrace{d_d(r,q)}_{\geq 0} \quad \text{ok.}$$

  Falls $p \neq q$ gilt, muss $r \neq p$ oder $r \neq q$ sein.

  (sonst: $p = r = q$ $\lightning$). Also ist $d_d(p,r) = 1$ oder $d_d(r,q) = 1$,

  d.h. in jedem Fall

  $$d_d(p,r) + d_d(r,q) \geq 1 \overset{p \neq q}{=} d_d(p,q). \quad \text{ok.}$$

Also gilt in jedem Fall $d_d(p,q) \leq d_d(p,r) + d_d(r,q)$

$\Rightarrow$ d_d ist eine Metrik auf M.

(ii) Rechnen wieder die Axiome einer Metrik nach:

- Gelte $x = y$.

$\Rightarrow$ x, y sind linear abhängig

$\Rightarrow$ $d_f(x,y) = \|x-y\|_2 = \|0\|_2 = 0$ ok.

Gelte $d_f(x,y) = 0$.

$\nearrow$ x, y sind linear unabhängig

$\overset{\text{insb.}}{\Rightarrow}$ $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad 0 = d_f(x,y) \overset{\text{l.u.}}{=} \underbrace{\|x\|_2}_{>0} + \underbrace{\|y\|_2}_{>0} > 0 \quad ↯$$

Also sind x und y linear abhängig und es folgt:

$$0 = d_f(x,y) = \|x-y\|_2$$

$\overset{\|\cdot\|_2\text{-Norm}}{\Rightarrow}$ $x - y = 0$, d.h. $x = y$. ok.

Haben also insgesamt gezeigt:

$$d_f(x,y) = 0 \iff x = y.$$

- Symmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Falls x, y linear unabhängig sind ist:

$$d_f(x,y) = \|x\|_2 + \|y\|_2 = \|y\|_2 + \|x\|_2 = d_f(y,x).$$

Falls x, y linear abhängig sind ist:

$$d_f(x,y) = \|x-y\|_2 = \|y-x\|_2 = d_f(y,x)$$

In jedem Fall gilt also

$$d_f(x,y) = d_f(y,x).$$

• Dreiecksungleichung: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^2$

Wir müssen verschiedene Fälle unterscheiden:

(1) x, y Linear abhängig, x, z Linear unabhängig, y, z Linear abhängig

$$d_f(x,y) = \|x-y\|_2 = \|x-z+z-y\|_2 \leq \|x-z\|_2 + \|z-y\|_2$$

$$\leq \|x\|_2 + \|z\|_2 + \|z-y\|_2 = d_f(x,z) + d_f(z,y)$$ ok.

(2) x, y Linear abhängig, x, z Linear abhängig, y, z Linear unabhängig

$$d_f(x,y) = \|x-y\|_2 = \|x-z+z-y\|_2 \leq \|x-z\|_2 + \|z-y\|_2$$

$$\leq \|x-z\|_2 + \|z\|_2 + \|y\|_2 = d_f(x,z) + d_f(z,y)$$ ok.

(3) x, y Linear abhängig, x, z Linear unabhängig, y, z Linear unabhängig

$$d_f(x,y) = \|x-y\|_2 = \|x-z+z-y\|_2 \leq \|x-z\|_2 + \|z-y\|_2$$

$$\leq \|x\|_2 + \|z\|_2 + \|z\|_2 + \|y\|_2 = d_f(x,z) + d_f(z,y)$$ ok.

(4) x, y Linear abhängig, x, z Linear abhängig, y, z Linear abhängig

$$d_f(x,y) = \|x-y\|_2 = \|x-z+z-y\|_2 \leq \|x-z\|_2 + \|z-y\|_2$$

$$= d_f(x,z) + d_f(z,y)$$ ok.

(5) x, y Linear unabhängig, x, z Linear unabhängig, y, z Linear abhängig

$$d_f(x,y) = \|x\|_2 + \|y\|_2 = \|x\|_2 + \|z-z+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|z\|_2 + \|z-y\|_2$$

$$= d_f(x,z) + d_f(z,y)$$ ok.

(6) x,y linear unabhängig, x,z linear abhängig, y,z linear unabhängig

$$d_f(x,y) = \|x\|_2 + \|y\|_2 = \|x-z+z\|_2 + \|y\|_2 \leq \|x-z\|_2 + \|z\|_2 + \|y\|_2$$

$$= d_f(x,z) + d_f(z,y)$$ ok.

(7) x,y linear unabhängig, x,z linear unabhängig, y,z linear unabhängig

$$d_f(x,y) = \|x\|_2 + \|y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|z\|_2 + \|z\|_2 + \|y\|_2$$

$$= d_f(x,z) + d_f(z,y)$$ ok.

(8) x,y linear unabhängig, x,z linear abhängig, y,z linear abhängig

$\Rightarrow x \neq 0$ sowie $y \neq 0$ (sonst: x,y linear abhängig ↯)

$\Rightarrow z \in \mathrm{Span}(x)$ sowie $z \in \mathrm{Span}(y)$

d.h. $z \in \mathrm{Span}(x) \cap \mathrm{Span}(y) = \{0\}$ da x,y lin. unabhängig

$\Rightarrow z = 0$

Also:

$$d_f(x,y) = \|x\|_2 + \|y\|_2 = \|x-\underset{=0}{z}\|_2 + \|\underset{=0}{z}-y\|_2 \overset{\substack{0,x \text{ l.a.} \\ 0,y \text{ l.a.}}}{=} d_f(x,z) + d_f(z,y)$$ ok.

In jedem Fall gilt also:

$$d_f(x,y) \leq d_f(x,z) + d_f(z,y).$$

$\Rightarrow d_f$ ist Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$.

- Wenn zwei Punkte auf derselben Geraden durch $0 \in \mathbb{R}^2$ liegen misst d_f den euklidischen Abstand der Punkte.

In allen anderen Fällen wird von d_f der euklidische Abstand des „Umweges" über den Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ gemessen.

∎