Analysis II, WiSe 2012\2013 – Lösung Blatt 3

3.1. (i) Sei $p \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$.

- Vorüberlegung:

$$U_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_f(p,x) < \varepsilon\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x,p \text{ linear unabhängig},\ d_f(p,x) < \varepsilon\}$$
$$\cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x,p \text{ linear abhängig},\ d_f(p,x) < \varepsilon\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x,p \text{ linear unabhängig},\ \|p\|_2 + \|x\|_2 < \varepsilon\} \leftarrow =: M_1$$
$$\cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x,p \text{ linear abhängig},\ \|p-x\|_2 < \varepsilon\} \leftarrow =: M_2$$

$$= M_1 \cup M_2$$

Ferner können wir schreiben:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x,p \text{ linear unabhängig}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\|_2 + \|x\|_2 < \varepsilon\}$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x,p \text{ linear abhängig}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|p-x\|_2 < \varepsilon\}$$

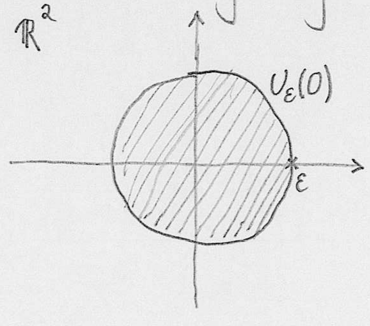
- Falls $p = 0$ gilt, erhalten wir:

p,x sind $\forall x \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig $\Rightarrow M_1 = \emptyset$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(0) = M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < \varepsilon\} = B_\varepsilon(0)$$

(wobei wir mit $B_\varepsilon(q)$ die ε-Umgebung bzgl. der euklidischen Metrik meinen)

Skizze:



- Sei nun also $p \neq 0$.

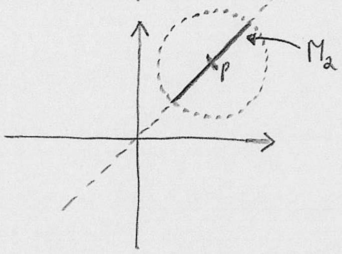
$$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 \mid p, x \text{ linear abhängig}\}$$
$$= \{\mu \cdot p \mid \mu \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R} \cdot p$$

$$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^2 \mid p, x \text{ linear unabhängig}\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \cdot p).$$

Wir berechnen zunächst M_2:

$$M_2 = (\mathbb{R} \cdot p) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|p - x\|_2 < \varepsilon\} = (\mathbb{R} \cdot p) \cap B_\varepsilon(p)$$

Skizze:



Wir müssen also nur noch M_1 für diesen Fall berechnen. Dazu ist eine weitere Fallunterscheidung erforderlich.

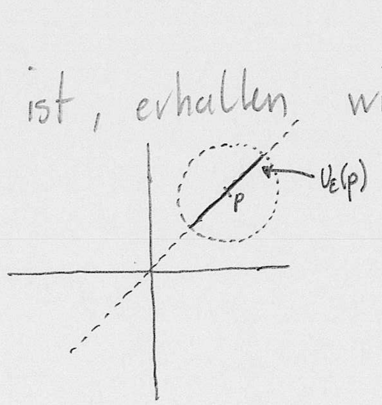
- Falls $\|p\|_2 \geq \varepsilon$ ist, folgt:

$$\|p\|_2 + \underbrace{\|x\|_2}_{\geq 0} \geq \|p\|_2 \geq \varepsilon \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow M_1 = \emptyset$$

<u>Also:</u> Falls $p \neq 0$ und $\|p\|_2 \geq \varepsilon$ ist, erhalten wir:

$$U_\varepsilon(p) = (\mathbb{R} \cdot p) \cap B_\varepsilon(p)$$



- Falls $\|p\|_2 < \varepsilon$ ist, berechnen wir:

$$M_1 = \left(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}\cdot p)\right) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\|_2 + \|x\|_2 < \varepsilon\}$$

$$= \left(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}\cdot p)\right) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < \varepsilon - \|p\|_2\}$$

$$= \left(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}\cdot p)\right) \cap B_{\varepsilon - \|p\|_2}(0) \qquad (\text{beachte: } \varepsilon - \|p\|_2 > 0\ !)$$

Wir wollen eine schönere Darstellung für $U_\varepsilon(p)$ finden. Es ist $B_{\varepsilon-\|p\|_2}(0) \subset B_\varepsilon(p)$ denn: (*)

Ist $x \in B_{\varepsilon-\|p\|_2}(0) \Rightarrow \|x\|_2 < \varepsilon - \|p\|_2$. d.h. $\|p\|_2 + \|x\|_2 < \varepsilon$

$$\Rightarrow \|p-x\|_2 \leq \|p\|_2 + \|x\|_2 \overset{\text{s.o.}}{<} \varepsilon \quad \Rightarrow x \in B_\varepsilon(p) \qquad \text{ok.}$$

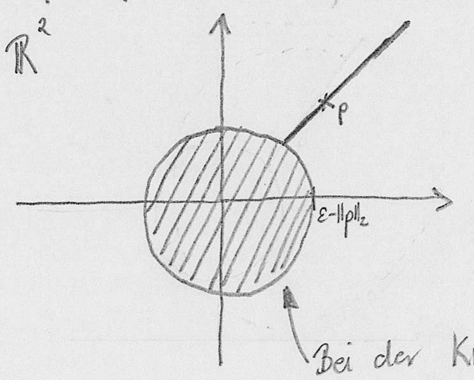
Damit erhalten wir:

$$U_\varepsilon(p) = M_1 \cup M_2 = \left(\left(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}\cdot p)\right) \cap B_{\varepsilon-\|p\|_2}(0)\right) \cup \left((\mathbb{R}\cdot p) \cap B_\varepsilon(p)\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \left(\left(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}\cdot p)\right) \cap B_{\varepsilon-\|p\|_2}(0)\right) \cup \left((\mathbb{R}\cdot p) \cap B_{\varepsilon-\|p\|_2}(0)\right) \cup \left((\mathbb{R}\cdot p) \cap B_\varepsilon(p)\right)$$

$$= B_{\varepsilon-\|p\|_2}(0) \cup \left((\mathbb{R}\cdot p) \cap B_\varepsilon(p)\right)$$

Skizze:



Bei der Kreisscheibe gehört der Rand nicht zur Menge dazu!

Damit sind alle Fälle behandelt.

(ii) (a) $U_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_d(p,x) < \varepsilon\}$

- Falls $\varepsilon \leq 1$ ist:

$$d_d(p,x) < \varepsilon \overset{\text{Definition}}{\Longleftrightarrow} d_d(p,x) = 0$$

$$\overset{d_d \text{ Metrik}}{\Longleftrightarrow} p = x$$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(p) = \{p\}$$

- Falls $\varepsilon > 1$ ist: Nach Definition von d_d ist $d_d(p,x) \leq 1 < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$. $\Rightarrow U_\varepsilon(p) = \mathbb{R}^2$.

<u>Also:</u> Die ε-Umgebungen von p sind $\{p\}$ sowie $\mathbb{R}^2$.

(b) Es ist $U \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von $p \in \mathbb{R}^2$

$\Longleftrightarrow$ Für ein $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(p) \subset U$.

$\Rightarrow p \in U$.

Ist umgekehrt $p \in U$ dann ist $U_{\frac{1}{2}}(p) \overset{(a)}{=} \{p\} \subset U$.

<u>Also:</u> Die Umgebungen von p sind genau die Mengen $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $p \in U$.

(c) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ beliebig.

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ist $\forall p \in M \quad U_\varepsilon(p) \overset{(a)}{=} \{p\} \subset M$

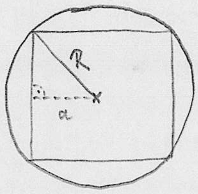
$\Rightarrow M$ ist offen.

<u>Also:</u> Jede Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist bzgl. d_d offen.

$\Rightarrow$ Jede Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist bzgl. d_d abgeschlossen.

$\blacksquare$

3.2. (i) • Idee: Für Quader im $\mathbb{R}^n$ kann die Aussage leicht aus der Aufgabe I.3.1. gefolgert werden. Wir legen also einen (offenen) Quader in die Kugel hinein:



$$2a^2 = R^2 \quad \text{(Pythagoras)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

• Mit dieser Idee definieren wir nun:

$$Q := \left(p_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, p_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \times \ldots \times \left(p_n - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, p_n + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subset \mathbb{R}^n$$

Behauptung: $Q \subset U_\varepsilon(p)$. $\quad (*)$

Denn: Sei $x \in Q \Rightarrow p_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} < x_i < p_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad 1 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow |x_i - p_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad 1 \leq i \leq n$$

Damit:

$$d(x,p)^2 = \|x-p\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - p_i|^2$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} = n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2, \text{ d.h. } d(x,p) < \varepsilon.$$

$\Rightarrow x \in U_\varepsilon(p)$ ok.

• Mit Übungsaufgabe I.3.1. existiert nun für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ ein $\eta_i \in \mathbb{Q}$ mit

$$p_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} < \eta_i < p_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

d.h. mit $\eta := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ gilt $\eta \in \mathbb{Q}^n$ sowie

$$\eta \in Q \overset{(*)}{\subset} U_\varepsilon(p).$$

(ii) • Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$\overset{\text{Definition}}{\Longrightarrow}$ $\forall\, p \in M$ gibt es ein $\varepsilon_p > 0$ mit $U_{\varepsilon_p}(p) \subset M$.

Da stets $p \in U_{\varepsilon_p}(p)$ gilt, erhalten wir:

$$M = \bigcup_{p \in M} U_{\varepsilon_p}(p)$$

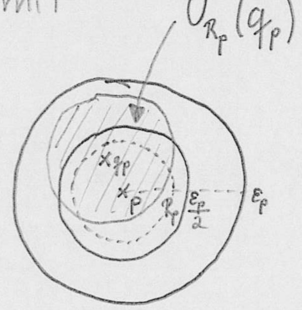
• Wir fixieren nun ein $p \in M$ und wollen eine in $U_{\varepsilon_p}(p)$ enthaltene Kugel konstruieren, welche einen Mittelpunkt aus $\mathbb{Q}^n$, einen Radius aus $\mathbb{Q}$ besitzt und p umfasst.

Nach Aufgabe I.3.1 existiert ein $R_p \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 < R_p < \frac{\varepsilon_p}{2}$$

und nach Teil (i) gibt es ein $q_p \in \mathbb{Q}^n$ mit

$$q_p \in U_{R_p}(p)$$



Wir behaupten, dass die Kugel $U_{R_p}(q_p)$ die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst ist

$$q_p \in U_{R_p}(p) \Rightarrow d(q_p, p) < R_p$$

$$\Rightarrow p \in U_{R_p}(q_p).$$

Außerdem ist $U_{R_p}(q_p) \subset U_{\varepsilon_p}(p)$, denn ist $x \in U_{R_p}(q_p)$ beliebig, dann: $d(x, q_p) < R_p$

$$\Rightarrow d(x,p) \leq d(x,q_p) + d(q_p, p) < R_p + R_p < \frac{\varepsilon_p}{2} + \frac{\varepsilon_p}{2} = \varepsilon_p$$

$$\Rightarrow x \in U_{\varepsilon_p}(p) \quad \text{ok.}$$

- Mit diesen Kugeln folgt nun:

$$M = \bigcup_{p\in M} U_{\varepsilon_p}(p) \underset{\text{wg. } U_{R_p}(q_p)\subset U_{\varepsilon_p}(p)\ \forall p\in M}{\supset} \bigcup_{p\in M} U_{R_p}(q_p) \underset{\text{wg. } p\in U_{R_p}(q_p)\ \forall p\in M}{\supset} M$$

$\Rightarrow \quad M = \bigcup_{p\in M} U_{R_p}(q_p) \qquad$ für gewisse $q_p \in M\cap\mathbb{Q}^n$ und $R_p\in\mathbb{Q}$.

- Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch die Menge $\mathbb{Q}^n\times\mathbb{Q}$ aller möglichen rationalen Kugelmittelpunkte und Radien abzählbar.

$\Rightarrow$ In der Gleichung $M = \bigcup_{p\in M} U_{R_p}(q_p)$ treten höchstens abzählbar viele verschiedene ε-Umgebungen auf.

Indem wir diese abzählen, erhalten wir eine abzählbare Menge $I\subset\mathbb{N}$ und zu jedem $i\in I$ ein $\varepsilon_i>0$ sowie $x_i\in M$ mit

$$M = \bigcup_{p\in M} U_{R_p}(q_p) = \bigcup_{i\in I} U_{\varepsilon_i}(x_i)$$

$\blacksquare$

3.3. (i) Sei $x \in M$.

Ist $y \in M \setminus \{x\}$ beliebig, dann existieren wegen der Hausdorff-Eigenschaft von (M, d) Umgebungen U von x sowie V von y mit

$$U \cap V = \emptyset.$$

Da V Umgebung von y ist, gibt es eine offene Menge W_y mit

$$y \in W_y \subset V.$$

Wegen $U \cap V = \emptyset$ ist auch $W_y \cap U = \emptyset$, also insbesondere wegen $x \in U$:

$$x \notin W_y, \quad \text{d.h.} \quad W_y \subset M \setminus \{x\}.$$

Da stets $y \in W_y$ gilt, erhalten wir mit diesen Mengen:

$$M \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in M \setminus \{x\}} W_y$$

also ist $M \setminus \{x\}$ offen als Vereinigung offener Mengen, d.h. $\{x\}$ ist abgeschlossen.

(ii) Nach Definition von Abgeschlossenheit genügt es zu zeigen:

$$M \times M \setminus \Delta \text{ ist offen in } (M \times M, d').$$

- Sei also $(x, y) \in M \times M \setminus \Delta$ beliebig. Wegen $(x, y) \notin \Delta$, ist

$$x \neq y.$$

Wegen der Hausdorff-Eigenschaft von (M, d) existieren also Umgebungen U von x sowie V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

U Umgebung von $x \Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset U$ für geeignetes $\varepsilon > 0$

V Umgebung von $y \Rightarrow U_\tau(y) \subset V$ für geeignetes $\tau > 0$.

Nach Konstruktion gilt dann:

$$U_\varepsilon(x) \cap U_\tau(y) = \emptyset . \qquad (*)$$

- Wir betrachten nun die Menge

$$P := U_\varepsilon(x) \times U_\tau(y) \subset M \times M$$

und definieren $\tilde{\varepsilon} := \min\{\varepsilon, \tau\} > 0$.

Wegen $(*)$ ist $P \subset M \times M \setminus \Delta$.

- Nun gilt $U_{\tilde{\varepsilon}}(x,y) \subset P$ (Kugel in $(M \times M, d')$!) $\qquad (**)$

denn ist $(z_1, z_2) \in U_{\tilde{\varepsilon}}((x,y))$, dann:

$$d'((z_1,z_2),(x,y)) < \tilde{\varepsilon} \text{ , d.h. } \max\{d(z_1,x), d(z_2,y)\} < \tilde{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow d(z_1,x) < \tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon,\tau\} \leq \varepsilon \text{ , d.h. } z_1 \in U_\varepsilon(x)$$

sowie

$$d(z_2,y) < \tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon,\tau\} \leq \tau \text{ , d.h. } z_2 \in U_\tau(y) .$$

$$\Rightarrow (z_1,z_2) \in U_\varepsilon(x) \times U_\tau(y) = P .$$

- Wegen $(**)$ ist nun für das Konstruierte $\tilde{\varepsilon} > 0$:

$$U_{\tilde{\varepsilon}}((x,y)) \subset P \subset M \times M \setminus \Delta .$$

Da $(x,y) \in M \times M \setminus \Delta$ beliebig war, folgt, dass $M \times M \setminus \Delta$ offen ist. $\blacksquare$

$\underline{3.4.}$ (i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$.

- $d_p\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 0 \iff \max\{|x_1-y_1|_p, |x_2-y_2|_p\} = 0$

$$\iff |x_1-y_1|_p = 0 \quad \text{und} \quad |x_2-y_2|_p = 0$$

$$\overset{|\cdot|_p \text{ Absolutbetrag}}{\iff} x_1 - y_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 - y_2 = 0$$

$$\iff x_1 = y_1 \quad \text{und} \quad x_2 = y_2, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{ok.}$$

- Symmetrie: Für jeden Absolutbetrag gilt: $|-1| = 1$

(denn: $|1| = |1 \cdot 1| = |1|^2 \overset{|1| \neq 0}{\Rightarrow} |1| = 1$.

Damit: $|-1|^2 = |(-1)\cdot(-1)| = |1| = 1 \Rightarrow |-1| = \pm 1$ und wegen $|\cdot| \geq 0$:

$|-1| = 1$)

Damit:

$$d_p\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \max\{|x_1-y_1|_p, |x_2-y_2|_p\} = \max\{\underbrace{|-1|_p}_{=1} \cdot |y_1-x_1|_p, \underbrace{|-1|_p}_{=1} \cdot |y_2-x_2|_p\}$$

$$= \max\{|y_1-x_1|_p, |y_2-x_2|_p\} = d_p\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{ok.}$$

- Zunächst ist:

$$d_p\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \max\{|x_1-y_1|_p, |x_2-y_2|_p\}$$

$$= \max\{|x_1-z_1+z_1-y_1|_p, |x_2-z_2+z_2-y_2|_p\}$$

$$\overset{\text{I.4.1.}}{\leq} \max\{\max\{|x_1-z_1|_p, |z_1-y_1|_p\}, \max\{|x_2-z_2|_p, |z_2-y_2|_p\}\}$$

$$= \max\{\max\{|x_1-z_1|_p, |x_2-z_2|_p\}, \max\{|z_1-y_1|_p, |z_2-y_2|_p\}\}$$

$$= \max\left\{d_p\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right), d_p\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right\}$$

Also ist die geforderte Ungleichung nachgewiesen. Wegen

$$d_p\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) \leq \max\left\{d_p\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right), d_p\left(\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\leq d_p\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right) + d_p\left(\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$$

folgt hieraus auch direkt die Dreiecksungleichung.

(ii) (a) Sei $y \in B(x,r)$. Zu zeigen: $B(y,r) = B(x,r)$.

- Ist $z \in B(x,r)$, d.h. $d_p(z,x) < r$, dann berechnen wir:

$$d_p(z,y) \overset{(i)}{\leq} \max\{\underbrace{d_p(z,x)}_{<r}, \underbrace{d_p(x,y)}_{<r \text{ da } y \in B(x,r)}\} < r$$

$\Rightarrow z \in B(y,r)$

Also gilt: $B(x,r) \subset B(y,r)$

- Ist $z \in B(y,r)$, d.h. $d_p(z,y) < r$, dann berechnen wir:

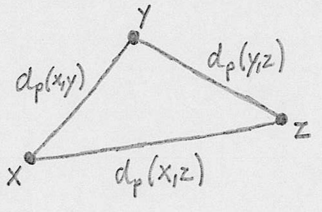
$$d_p(z,x) \overset{(i)}{\leq} \max\{\underbrace{d_p(z,y)}_{<r}, \underbrace{d_p(y,x)}_{<r \text{ da } y \in B(x,r)}\} < r$$

$\Rightarrow z \in B(x,r)$

Also gilt: $B(y,r) \subset B(x,r)$.

Insgesamt folgt also: $B(x,r) = B(y,r)$.

(b) Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}^2$.



Gilt $d_p(x,y) = d_p(x,z)$, dann sind wir fertig. Wir dürfen also $d_p(x,y) \neq d_p(x,z)$ annehmen und führen eine Fallunterscheidung durch:

- Falls $d_p(x,y) < d_p(x,z)$ gilt, berechnen wir:

$$d_p(y,z) \overset{(i)}{\leq} \max\{d_p(y,x), d_p(x,z)\}$$

$$\overset{d_p(y,x)<d_p(x,z)}{=} d_p(x,z)$$

$$\overset{(i)}{\leq} \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}$$

$$= d_p(y,z) \qquad \text{da } d_p(x,z) > d_p(x,y) \text{ gilt.}$$

Also: $d_p(y,z) \leq d_p(x,z) \leq d_p(y,z)$

$$\Rightarrow d_p(x,z) = d_p(y,z) \qquad \text{ok.}$$

- Falls $d_p(x,y) > d_p(x,z)$ gilt, berechnen wir analog:

$$d_p(y,z) \leq \max\{d_p(y,x), d_p(x,z)\}$$

$$= d_p(y,x)$$

$$\leq \max\{d_p(y,z), d_p(z,x)\}$$

$$= d_p(y,z)$$

Also: $d_p(y,z) \leq d_p(y,x) \leq d_p(y,z)$

$$\Rightarrow d_p(x,y) = d_p(y,z) \qquad \text{ok.}$$

(c) Es ist mit der Notation aus der Vorlesung

$$B(x,r) = U_r(x) \qquad (r\text{-Umgebung um } x \in \mathbb{Q}^2).$$

Nach Vorlesung ist $B(x,r)$ also offen und wir müssen nur noch zeigen, dass $B(x,r)$ auch abgeschlossen ist, d.h. dass $\mathbb{Q}^2 \setminus B(x,r)$ offen ist.

Sei dazu $y \in \mathbb{Q}^2 \setminus B(x,r)$ beliebig. Wir betrachten $B(y,r)$.

$\nearrow$ $B(y,r) \cap B(x,r) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, z \in B(y,r) \cap B(x,r)$ und mit (a) folgt:

$$B(x,r) \overset{z \in B(x,r)}{=} B(z,r) \overset{z \in B(y,r)}{=} B(y,r)$$

$\overset{\text{insb.}}{\Longrightarrow}$ $y \in B(x,r)$ $\lightning$ zu $y \in \mathbb{Q}^2 \setminus B(x,r)$.

Also ist $B(y,r) \cap B(x,r) = \emptyset$, d.h. $B(y,r) \subset \mathbb{Q}^2 \setminus B(x,r)$

Wegen $U_r(y) = B(y,r) \subset \mathbb{Q}^2 \setminus B(x,r)$ haben wir eine passende ε-Umgebung um y gefunden. Da $y \in \mathbb{Q}^2 \setminus B(x,r)$ beliebig war, folgt: $\mathbb{Q}^2 \setminus B(x,r)$ ist offen.

$\blacksquare$

Bemerkungen:

- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entstehen durch einen gewissen „Vervollständigungsprozess" aus $\mathbb{Q}$, ausgestattet mit dem gewöhnlichen Absolutbetrag $|\cdot|$.
- Analog kann auch $\mathbb{Q}$, ausgestattet mit dem p-adischen Absolutbetrag $|\cdot|_p$ zu einem Körper $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ vervollständigt werden.
- Über $\mathbb{Q}_p$ kann dann analog zu $\mathbb{R}$ eine „p-adische Analysis" aufgebaut werden, welche ähnlich „merkwürdige" Gesetzmäßigkeiten erbt, wie wir sie in dieser Aufgabe nachgewiesen haben.
- Die Körper $\mathbb{Q}_p$ spielen in der Zahlentheorie eine große Rolle.