Analysis II, WiSe 2012\2013 – Lösung Blatt 4

4.1. (i) Wir rechnen die Axiome einer Topologie nach:

(1) $\emptyset \in \mathfrak{X}$ nach Definition von $\mathfrak{X}$.

$X \in \mathfrak{X}$ da $X \setminus X = \emptyset$ und $\emptyset$ endlich ist. ok.

(2) Seien $U, V \in \mathfrak{X}$. Zu zeigen: $U \cap V \in \mathfrak{X}$. Dazu:

OE seien $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$ (sonst: $U \cap V = \emptyset \in \mathfrak{X}$)

$\Rightarrow$ Nach Voraussetzung ist

$$X \setminus U = X \cap U^c \text{ endlich}$$

sowie $X \setminus V = X \cap V^c$ endlich.

$$\Rightarrow X \setminus (U \cap V) = X \cap (U \cap V)^c = X \cap (U^c \cup V^c)$$

$$= (X \cap U^c) \cup (X \cap V^c)$$

$\Rightarrow X \setminus (U \cap V)$ ist als Vereinigung zweier endlicher Mengen endlich, d.h. $U \cap V \in \mathfrak{X}$. ok.

(3) Seien $U_j \in \mathfrak{X}$ für $j \in J$ mit einer beliebigen Menge J.

Zu zeigen: $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathfrak{X}$. Dazu:

OE seien $U_j \neq \emptyset$ $\forall j \in J$ (denn: Falls alle U_j leer sind, ist $\bigcup_{j \in J} U_j = \emptyset \in \mathfrak{X}$. Sind nicht alle U_j leer, können wir die leeren Mengen weglassen ohne die zu betrachtende Menge $\bigcup_{j \in J} U_j$ zu verändern)

$\Rightarrow$ Nach Voraussetzung ist $X \setminus U_j = X \cap U_j^c$ endlich $\forall j \in J$.

Damit:

$$X \setminus \bigcup_{j\in J} U_j = X \cap \Big(\bigcup_{j\in J} U_j\Big)^c = X \cap \Big(\bigcap_{j\in J} U_j^c\Big) \subset X \cap U_{j_0}^c$$

für ein beliebiges $j_0 \in J$. Da $X \cap U_{j_0}^c$ endlich ist, ist auch $X \setminus \bigcup_{j\in J} U_j$ endlich (als Teilmenge) $\Rightarrow \bigcup_{j\in J} U_j \in \mathfrak{X}$ ok.

Insgesamt ist gezeigt: $\mathfrak{X}$ ist eine Topologie auf X.

(ii) Sei $M = \{1,2,3\}$ eine Menge mit 3 Elementen.

$\Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M\}$.

- Überlegung vorab: Da die Potenzmenge von M endlich ist, gibt es in jeder Topologie auf M nur endlich viele offene Mengen. Im Axiom (3) können wir uns also darauf beschränken zu zeigen, dass die Vereinigung endlich vieler offener Mengen wieder offen ist. Per Induktion ist klar: Ist die Vereinigung zweier offener Mengen offen, dann ist auch die Vereinigung endlich vieler offener Mengen stets offen.

  <u>Also:</u> Für (3) genügt es zu zeigen, dass die Vereinigung zweier offener Mengen offen ist.

  Wir bestimmen die Topologien entlang der Anzahl der in ihnen offenen Mengen:

- $\# = 0$, $\# = 1$: Keine Topologie, da wegen (1) stets $\emptyset$ und M offen sein müssen.

• $\# = 2$: Einzige Möglichkeit: $T_0 = \{\emptyset, M\}$.

Nach Vorlesung ist T_0 eine Topologie („gröbste Topologie")

• $\# = 3$: Hier sind alle Möglichkeiten offenbar Topologien:

$T_1 = \{\emptyset, \{1\}, M\}$, $T_2 = \{\emptyset, \{2\}, M\}$, $T_3 = \{\emptyset, \{3\}, M\}$

$T_4 = \{\emptyset, \{1,2\}, M\}$, $T_5 = \{\emptyset, \{1,3\}, M\}$, $T_6 = \{\emptyset, \{2,3\}, M\}$.

• $\# = 4$: ◦ Sind zwei einelementige Mengen offen

$\Rightarrow$ Vereinigung ist offene zweielementige Menge $\lightning_{\#=4}$

(Bsp: $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, M\} \Rightarrow \{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$ nicht offen)

◦ Sind zwei zweielementige Mengen offen

$\Rightarrow$ Schnitt ist offene einelementige Menge $\lightning_{\#=4}$

(Bsp: $\{\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, M\} \Rightarrow \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\}$ nicht offen)

◦ Also: Müssen eine einelementige und eine zweielementige Menge als offen erklären:

$T_7 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, M\}$, $T_8 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,3\}, M\}$, $T_9 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, M\}$

$T_{10} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, M\}$, $T_{11} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, M\}$, $T_{12} = \{\emptyset, \{2\}, \{2,3\}, M\}$

$T_{13} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, M\}$, $T_{14} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}, M\}$, $T_{15} = \{\emptyset, \{3\}, \{2,3\}, M\}$

Offenbar sind diese Mengensysteme tatsächlich Topologien.

• $\# = 5$: ◦ Sind alle einelementigen Mengen offen, müssen wegen (3) alle Mengen offen sein, d.h. die Topologie ist $\mathcal{P}(M)$ $\lightning_{\#=5}$.

◦ Sind alle zweielementigen Mengen offen, müssen wegen

(2) alle Mengen offen sein, d.h. die Topologie ist $\mathcal{P}(M)$ ↯$_{\#=5}$

- Eine einelementige, zwei zweielementige Mengen offen.
  Ist $\{a\}$ offen, müssen die zweielementigen offenen Mengen jeweils a enthalten (sonst erhalten wir mit (2) einen Widerspruch).
  Also: (offenbar alles Topologien)
  $T_{16} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, M\}$, $T_{17} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, M\}$
  $T_{18} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M\}$
- Zwei einelementige, eine zweielementige Menge offen.
  Wegen (3) muss die zweielementige Menge die Vereinigung der einelementigen Mengen sein.
  Also: (offenbar alles Topologien)
  $T_{19} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, M\}$, $T_{20} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, M\}$
  $T_{21} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, M\}$

- $\# = 6$: Wählen wir drei einelementige Mengen als offen oder drei zweielementige Mengen als offen, dann erhalten wir analog zum Fall „$\#=5$" einen Widerspruch. Wir müssen also zwei einelementige und zwei zweielementige Mengen als offen erklären. Sind $\{a\}$ und $\{b\}$ offen, muss wegen (3) auch $\{a,b\}$ als offen erklärt werden.
  Also: (offenbar alles Topologien)
  $T_{22} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, M\}$, $T_{23} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, M\}$

$T_{24} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, M\}$, $T_{25} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M\}$

$T_{26} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, M\}$, $T_{27} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, M\}$

- $\# > 6$: In diesem Fall sind wir gezwungen, alle einelementigen bzw. alle zweielementigen Mengen als offen zu erklären. Mit der Überlegung vom Anfang von „$\#=5$" muss dann aber jede Menge offen sein. Einzige Möglichkeit ist also

$$T_{28} = \mathcal{P}(M)$$

(nach Vorlesung eine Topologie, die diskrete Topologie).

$\Rightarrow$ Insgesamt sind 29 der $2^8 = 256$ möglichen Mengensysteme Topologien auf $M = \{0,1,2\}$.

$\blacksquare$

4.2. • Behauptung: $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Denn:

Sei $p \in A$. Ist für ein $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(p)$ eine ε-Umgebung um p, dann gibt es analog zu Aufgabe 3.2. (i) einen „irrationalen Punkt" in $U_\varepsilon(p)$, d.h. es gibt ein $\eta \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^2$ mit $\eta \in U_\varepsilon(p)$. (denn: zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine irrationale Zahl, vgl. z.B. die Lösung von Aufgabe I.10.1. (i)).

Offenbar gilt $A \subset \mathbb{Q}^2$. $\Rightarrow$ In $U_\varepsilon(p)$ gibt es ein Element von $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Ist nun U irgendeine Umgebung von p, dann gibt es nach Definition ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subset U$. Nach obiger Überlegung ist $U_\varepsilon(p) \not\subset A$, d.h. $U \not\subset A$.

Also gibt es keine Umgebung U von p mit $U \subset A$.

$\Rightarrow$ p ist kein innerer Punkt von A

$\overset{p \text{ beliebig}}{\Longrightarrow} \overset{\circ}{A} = \emptyset$.

• Wegen $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \emptyset = \overline{A}$ genügt es nun die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A zu berechnen.

• Wir definieren $Q := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ und behaupten, dass Q abgeschlossen ist. Dazu:

Zunächst ist $[0,1] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, denn

$$\mathbb{R} \setminus [0,1] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}} \underbrace{U_1(k)}_{\text{bzgl. } \mathbb{R}} \quad \text{also offen in } \mathbb{R}.$$

Ist nun $p = \binom{p_1}{p_2} \in \mathbb{R}^2 \setminus Q$, dann ist $p_1 \notin [0,1]$ oder $p_2 \notin [0,1]$.

OE sei $p_1 \notin [0,1]$ (der andere Fall funktioniert analog).

$$\overset{[0,1] \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p_1| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R} \setminus [0,1].$$

$\Rightarrow$ $U_\varepsilon(p) \subset \mathbb{R}^2 \setminus Q$, denn ist $x = \binom{x_1}{x_2} \in U_\varepsilon(p)$, dann:

$$|x_1 - p_1| = \sqrt{(x_1-p_1)^2} \overset{\sqrt{\cdot} \text{ monoton}}{\leq} \sqrt{(x_1-p_1)^2 + \underbrace{(x_2-p_2)^2}_{\geq 0}} = \|x-p\|_2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x_1 \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \Rightarrow x \in \mathbb{R}^2 \setminus Q.$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus Q$ ist offen $\Rightarrow$ Q ist abgeschlossen.

- Nach Definition ist offenbar $A \subset Q$ (denn $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $0 < \frac{1}{n} \leq 1$).

$$\overset{VL}{\Longrightarrow} \overline{A} \subset \overline{Q} \overset{Q \text{ abgeschl.}}{=} Q.$$

Also: Um $\overline{A}$ zu berechnen, genügt es, in Q die Häufungspunkte von A zu berechnen.

- Hilfsaussage: $(0,1] = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ Dazu: $(*)$

Offensichtlich ist die Vereinigung disjunkt.

„$\supset$": $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. $\Rightarrow \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \subset (0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (0,1] \supset \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

„$\subset$": Ist $0 < x \leq 1$ gegeben, dann existiert wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < x$. Indem wir das kleinste N mit dieser Eigenschaft verwenden erhalten wir $\frac{1}{N} < x \leq \frac{1}{N-1}$, d.h. $x \in \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}\right]$. $\Rightarrow (0,1] \subset \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

ok.

- Damit zeigen wir: Ist $x \in ((0,1] \times (0,1]) \setminus A$, dann ist x kein Häufungspunkt von A.

Denn: Wir schreiben $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow$ $x_1 \in (0,1]$, $x_2 \in (0,1]$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\exists$ (eindeutige) $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$x_1 \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \text{ und } x_2 \in \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right]$$

Wegen $x \notin A$ ist $x_1 \neq \frac{1}{n}$ oder $x_2 \neq \frac{1}{m}$.

OE sei $x_1 \neq \frac{1}{n}$ (zweiter Fall funktioniert analog)

$\Rightarrow x_1 \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ offen (**)

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $\{y \in \mathbb{R} \mid |y - x_1| < \varepsilon\} \subset \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ denn ist $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U_\varepsilon(x)$, dann:

$$|y_1 - x_1| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2} \leq \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = \|y - x\|_2 < \varepsilon$$

$\Rightarrow y_1 \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ d.h. $y_1 \neq \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow y \notin A$.

Damit ist $U_\varepsilon(x)$ aber eine Umgebung von x mit

$$(U_\varepsilon(x) \cap A) \setminus \{x\} = \emptyset$$

$\Rightarrow$ x ist kein Häufungspunkt von A.

- Wir müssen noch die Punkte aus $(\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$ untersuchen. Sei dazu:

$$B := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subset (0,1].$$

Behauptung: Ist $x \in \left(\{0\} \times ((0,1] \setminus B)\right) \cup \left(((0,1] \setminus B) \times \{0\}\right)$ dann ist x kein Häufungspunkt von A.

Dazu: Œ sei $x \in ((0,1] \setminus B) \times \{0\}$ (anderer Fall analog)

Schreibe wieder $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$x_1 \in (0,1] \overset{(*)}{\Longrightarrow} \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $x_1 \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

Da $x_1 \notin B$, folgt $x_1 \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.

Wegen $x_2 = 0$ ist $x \notin A$.

$\Rightarrow$ Wir haben die Situation aus (**), also liefert das dort angegebene Argument, dass x kein Häufungspunkt von A ist.

- Behauptung: Die Häufungspunkte von A sind genau die Punkte $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \cup (\{0\} \times B) \cup (B \times \{0\})$. Dazu:

Da alle anderen Punkte ausgeschlossen wurden müssen obige Punkte nur noch als Häufungspunkte erkannt werden.

- Für $\varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\sqrt{2}}{N} < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 1/N \\ 1/N \end{pmatrix} - 0 \right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{N} < \varepsilon \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/N \\ 1/N \end{pmatrix} \in U_\varepsilon(0)$$

Ist U beliebige Umgebung um 0 dann ist $U_\varepsilon(0) \subset U$ für $\varepsilon > 0$ geeignet und $\begin{pmatrix} 1/N \\ 1/N \end{pmatrix} \in U_\varepsilon(0) \subset U$ für $N \in \mathbb{N}$ geeignet.

$$\Rightarrow (U \cap A) \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \neq \emptyset. \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Häufungspunkt.}$$

- Sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/n \end{pmatrix}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Für $\varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 1/N \\ 1/n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/n \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/N \\ 1/n \end{pmatrix} \in U_\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/n \end{pmatrix}\right)$$

Ist also U beliebige Umgebung von $\binom{0}{1/n}$ dann ist

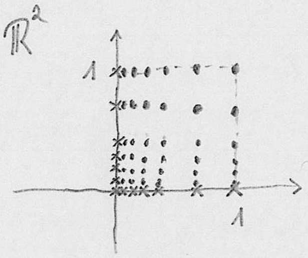
$U_\varepsilon(\binom{0}{1/n}) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$ geeignet und damit

$$\binom{1/N}{1/n} \in U_\varepsilon(\binom{0}{1/n}) \subset U \quad \text{für } N \in \mathbb{N} \text{ geeignet}$$

$\Rightarrow (U \cap A) \setminus \{\binom{0}{1/n}\} \neq \emptyset \Rightarrow \binom{0}{1/n}$ ist Häufungspunkt.

- Die Punkte $\binom{1/n}{0}$ werden analog wie eben behandelt.

Insgesamt: $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\}$.



$\bullet$: Punkte in A

$\times$: Häufungspunkte von A

$\blacksquare$

4.3. (i) • Sei $x \in \bigcup_{i \in I} \mathring{A}_i$.

$\Rightarrow x \in \mathring{A}_j$ für ein $j \in I$.

$\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists$ Umgebung U von x mit $U \subset A_j$.

$\Rightarrow U \subset A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

$\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\circ}$

Also ist $\bigcup_{i \in I} \mathring{A}_i \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\circ}$

Beispiel: $\mathbb{R}$ mit von der euklidischen Metrik induzierten Topologie,

$$A_n := [n, n+1] \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}^0$$

$\Rightarrow \mathring{A}_n = (n, n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$.

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^0} \mathring{A}_n = (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$

Andererseits:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^0} A_n = [0, \infty) \Rightarrow \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^{\circ} = (0, \infty) \supsetneq (0,\infty) \setminus \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{A}_n .$$

• Sei $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\circ}$.

$\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists$ Umgebung U von x mit $U \subset \bigcap_{i \in I} A_i$.

$\Rightarrow U \subset A_i \quad \forall i \in I$

$\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} x \in \mathring{A}_i \quad \forall i \in I$, d.h. $x \in \bigcap_{i \in I} \mathring{A}_i$

Also ist $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ \subset \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$.

Beispiel: $\mathbb{R}$ mit von der euklidischen Metrik induzierten Topologie,

$A_n := \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ für $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\} \Rightarrow \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^\circ = \emptyset$

Andererseits:

$A_n^\circ = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ = \{0\} \neq \emptyset = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^\circ$.

(ii) • Sei A offen und abgeschlossen.

$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow} A^\circ = A$ sowie $\overline{A} = A$

$\Rightarrow \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = A \setminus A = \emptyset$ ok.

• Sei $\partial A = \emptyset$.

Wegen $A^\circ \subset \overline{A}$ (nach Vorlesung), ist

$$(\overline{A} \setminus A^\circ) \cup A^\circ = \overline{A}$$

also $\overline{A} = \partial A \cup A^\circ \overset{\partial A = \emptyset}{\Rightarrow} \overline{A} = A^\circ$

Da nach Vorlesung $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ gilt, folgt damit:

$$A^\circ = A = \overline{A},$$

d.h. $A = \overline{A} \overset{\text{VL}}{\Rightarrow} A$ ist abgeschlossen

$A = A^\circ \overset{\text{VL}}{\Rightarrow} A$ ist offen ok. $\blacksquare$

4.4. (i) Der Einfachheit halber definieren wir

$$M_1 := \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ offen in } \mathbb{R}\}$$

$$M_2 := \{U \subset \hat{X} \mid 0' \in U,\ U \cap \mathbb{R} \text{ offen in } \mathbb{R},\ B_\varepsilon \subset U \text{ für ein } \varepsilon > 0\}$$

d.h. $\mathfrak{X} = M_1 \dot\cup M_2$. Wir rechnen die Axiome nach:

(1) • M_1 ist eine Topologie auf $\mathbb{R} \subset \hat{X}$.

$\Rightarrow \emptyset \in M_1 \Rightarrow \emptyset \in \mathfrak{X}$.

• Es ist $0' \in \hat{X}$ und $\hat{X} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ also offen in $\mathbb{R}$.

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon \subset \hat{X}$.

$\Rightarrow \hat{X} \in M_2$ also $\hat{X} \in \mathfrak{X}$

ok.

(2) Seien $U, V \in \mathfrak{X}$. Zu zeigen: $U \cap V \in \mathfrak{X}$.

Fallunterscheidung:

• Falls $U, V \in M_1$, d.h. offen in $\mathbb{R}$, dann ist $U \cap V \in M_1 \subset \mathfrak{X}$, da M_1 Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.

• Falls $U \in M_1$ und $V \in M_2$, dann ist insbesondere $U \subset \mathbb{R}$ und damit:

$$U \cap V \overset{U \subset \mathbb{R}}{=} U \cap \underbrace{(V \cap \mathbb{R})}_{\subset \mathbb{R} \text{ offen, da } V \in M_2} \quad \text{offen in } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow U \cap V \in M_1 \subset \mathfrak{X}$

• Falls $U \in M_2$ und $V \in M_1$: Analog zu eben: $U \cap V \in M_1 \subset \mathfrak{X}$.

• Falls $U, V \in M_2$, dann wählen wir $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit

$$B_{\varepsilon_1} \subset U \quad \text{sowie} \quad B_{\varepsilon_2} \subset V.$$

Wegen $O' \in U$, $O' \in V$ ist zunächst $O' \in U \cap V$.

Da $U \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ offen und $V \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ offen ist, haben wir:

$$(U \cap V) \cap \mathbb{R} = (U \cap \mathbb{R}) \cap (V \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \text{ offen.}$$

Schließlich gilt mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$:

$$\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathcal{B}_{\varepsilon_1} \subset U \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathcal{B}_{\varepsilon_2} \subset V$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon \subset U \cap V$.

$\Rightarrow U \cap V \in M_2 \subset \mathfrak{X}$

ok.

(3) Seien $U_j \in \mathfrak{X}$ für $j \in J$ mit einer beliebigen Menge J.

Zu zeigen: $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathfrak{X}$. Fallunterscheidung:

- Gilt $U_j \in M_1 \ \forall j \in J$, dann ist $\bigcup_{j \in J} U_j \subset \mathbb{R}$ offen, also $\bigcup_{j \in J} U_j \in M_1 \subset \mathfrak{X}$.

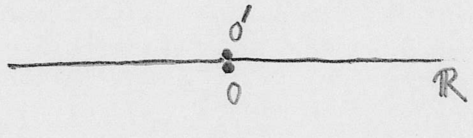
- Gilt $U_{j_0} \in M_2$ für mindestens ein $j_0 \in J$, dann wählen wir zunächst $\varepsilon > 0$ derart, dass $\mathcal{B}_\varepsilon \subset U_{j_0}$ gilt. Damit folgt:
  - $O' \in U_{j_0} \subset \bigcup_{j \in J} U_j$
  - $\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) \cap \mathbb{R} = \bigcup_{j \in J} \underset{\uparrow \text{ stets } \subset \mathbb{R} \text{ offen}}{(U_j \cap \mathbb{R})} \subset \mathbb{R}$ offen
  - $\mathcal{B}_\varepsilon \subset U_{j_0} \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

$\Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \in M_2 \subset \mathfrak{X}$

ok.

Insgesamt ist $\mathfrak{X}$ eine Topologie auf $\hat{X}$.

Der Raum $(\hat{X}, \mathfrak{X})$ entsteht, indem wir $\mathbb{R}$, ausgestattet mit der üblichen Topologie, um einen weiteren Punkt ergänzen. Indem wir mit M_2 geeignete Mengen zusätzlich als offen erklären, dehnen wir die Topologie von $\mathbb{R}$ auf diesen zusätzlichen Punkt $0'$ aus. Dazu müssen wir festlegen, wann eine Menge, die $0'$ enthält, offen sein soll. Wesentlicher Aspekt ist dabei die Definition einer Art „ε-Umgebung" B_ε um $0'$, die wie eine ε-Umgebung um 0 aussieht, nur dass 0 durch $0'$ ersetzt wird. Eine Menge die $0'$ enthält wird mit M_2 dann als offen erklärt, wenn es um jeden Punkt eine „dieser ε-Umgebungen" gibt. Also: Topologisch wird $0'$ „gleichberechtigt" zu 0 in den Raum eingeordnet – wir verdoppeln also den Nullpunkt in $\mathbb{R}$:



(ii) • Idee: In jedem metrischen Raum gilt die Hausdorffsche Trennungseigenschaft für verschiedene Punkte. Obige Skizze suggeriert, dass die Punkte 0 und $0'$ in $(\hat{X}, \mathfrak{X})$ nicht „getrennt" werden können.

• Sind $U, V \subset \hat{X}$ offen mit $0 \in U$ und $0' \in V$, dann gilt: $U \cap V \neq \emptyset$ (*)

Denn: Wegen $0 \in U$ $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ mit $U_{\varepsilon_1}(0) \subset U$, d.h.

$$(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \subset U.$$

Wegen $0' \in V$ $\exists\, \varepsilon_2 > 0$ mit $B_{\varepsilon_2} \subset V$, d.h.

$$(-\varepsilon_2, 0) \cup \{0'\} \cup (0, \varepsilon_2) \subset V$$

$\Rightarrow$ Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ folgt:

$\emptyset \neq (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \subset U \cap V.$

ok.

- $\nearrow$ d ist eine Metrik auf X deren offene Mengen mit den Mengen aus $\mathfrak{X}$ übereinstimmen.

$\overset{\text{Hausdorff}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Umgebungen $\tilde{U}$ von 0 sowie $\tilde{V}$ von $0'$ mit

$$\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$$

$\overset{\text{Def. Umgebung}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ offene Menge $U \subset \tilde{U}$ mit $0 \in U$ und offene Menge $V \subset \tilde{V}$ mit $0' \in V$.

Wegen $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ gilt auch $U \cap V = \emptyset$.

Aus $(*)$ folgt aber $U \cap V \neq \emptyset$ ↯

$\Rightarrow$ Es gibt keine solche Metrik.

■