Analysis II, WiSe 2012\2013 - Lösung Blatt 5

5.1. (i). „$\Rightarrow$": Sei f stetig und $x \in X$ beliebig.

Zu zeigen: f ist in x stetig.

Sei dazu $U \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$

$\overset{U \text{ Umgebung}}{\Longrightarrow}$ $\exists\ W \subset U$ offen mit $f(x) \in W$.

$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $V := f^{-1}(W) \subset X$ ist offen und wegen $f(x) \in W$ ist $x \in V$

$\Rightarrow$ V ist eine (offene) Umgebung von x und es ist

$$f(V) = f(f^{-1}(W)) \subset W \subset U$$

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ f ist in x stetig

„$\Leftarrow$": Sei f in allen Punkten $x \in X$ stetig.

Zu zeigen: f ist stetig.

Sei dazu $U \subset Y$ offen. Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Sei also $p \in f^{-1}(U)$ beliebig. $\Rightarrow$ $f(p) \in U$, d.h. U ist Umgebung von $f(p)$ (sogar offene Umgebung)

$\overset{f \text{ in } p \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Umgebung $V \subset X$ von p mit $f(V) \subset U$.

$\overset{V \text{ Umg. von } p}{\Longrightarrow}$ $\exists$ offene Menge $W_p \subset V$ mit $p \in W_p$.

Wegen $f(V) \subset U$ ist nun auch $f(W_p) \subset U$, d.h. $W_p \subset f^{-1}(U)$.

Da $p \in f^{-1}(U)$ beliebig war, können wir schreiben:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{p \in f^{-1}(U)} W_p$$

Also ist $f^{-1}(U)$ offen als Vereinigung offener Mengen.

$\Rightarrow$ f ist stetig. ok.

(ii) • „(a) $\Rightarrow$ (b)": Sei $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ $U_\varepsilon(f(x))$ ist Umgebung von $f(x)$

$\xRightarrow[\text{wg. (a)}]{f \text{ in } x \text{ stetig}}$ $\exists$ Umgebung $V \subset X$ von x mit $f(V) \subset U_\varepsilon(f(x))$

$\xRightarrow{V \text{ Umg. v. } x}$ $\exists$ $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset V$

Wegen $f(V) \subset U_\varepsilon(f(x))$ gilt auch $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$. $(*)$

Ist also $y \in X$ mit $d_X(x,y) < \delta$, dann folgt:

$$y \in U_\delta(x) \overset{(*)}{\Rightarrow} f(y) \in U_\varepsilon(f(x)) \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ (b) gilt.

• „(b) $\Rightarrow$ (c)": Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Aus (b) folgt, dass zu diesem ε ein $\delta > 0$ existiert mit:

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall\, y \in X \text{ mit } d_X(x,y) < \delta \quad (**).$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ existiert zu diesem δ ein $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$d_X(x, x_n) < \delta \quad \forall\, n \geq N.$$

Wenden wir hierauf $(**)$ an, dann folgt:

$$d_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N.$$

Also haben wir zu $\varepsilon > 0$ beliebig ein $N \in \mathbb{N}$ konstruiert, mit $d_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$.

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

$\Rightarrow$ (c) gilt.

• „(c) $\Rightarrow$ (a)": Sei U beliebige Umgebung von $f(x)$.

↯ $\nexists$ Umgebung V von x mit $f(V) \subset U$.

$\Rightarrow$ Insbesondere ist $\forall n \in \mathbb{N}$ $f\left(U_{\frac{1}{n}}(x)\right) \not\subset U$. $\quad$ (***)

Da U Umgebung von $f(x)$ ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(f(x)) \subset U.$$

$\overset{(***)}{\Longrightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $f\left(U_{\frac{1}{n}}(x)\right) \not\subset U_\varepsilon(f(x))$.

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $p_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$ mit $f(p_n) \notin U_\varepsilon(f(x))$.

Wegen $p_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$ ist $d_X(x, p_n) < \frac{1}{n}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge ist, erhalten wir für die Konstruierten $p_n \in X$: $\quad \lim\limits_{n \to \infty} p_n = x$.

$\overset{(c)}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(p_n) = f(x)$.

Nach Konstruktion gilt aber für unser $\varepsilon > 0$:

$$f(p_n) \notin U_\varepsilon(f(x)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. $\quad d_Y(f(x), f(p_n)) > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Die Folge $(f(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Kann nicht gegen $f(x)$ Konvergieren ↯

$\Rightarrow$ Es gibt doch eine Umgebung V von x mit $f(V) \subset U$.

$\Rightarrow$ (a) gilt. $\blacksquare$

5.2. Wir zeigen zunächst: $\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Sei dazu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = (a_{ij})_{i,j}$ fixiert und $(A^m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $A^m = (a_{ij}^m)_{i,j}$ eine Folge in $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = A$.

Wir zeigen: $\lim\limits_{m\to\infty} \det(A^m) = \det A$.

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $\|A^m - A\|_2 < \varepsilon \quad \forall\, m \geq N$.

Sind $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben, dann haben wir

$$|a_{kl}^m - a_{kl}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}^m - a_{ij})^2} = \|A^m - A\|_2 < \varepsilon \quad \forall\, m \geq N.$$

Also gilt: $\lim\limits_{m\to\infty} a_{kl}^m = a_{kl}$ in $\mathbb{R}$ $\forall\, k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

- Ist nun $\sigma \in S_n$ fixiert, dann folgt (da Produkte konvergenter Folgen nach Analysis I gegen das Produkt der Grenzwerte konvergieren):

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)}^m = \prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} \qquad (*)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $\sigma \in S_n$.

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists\, N_\sigma \in \mathbb{N}$ mit $\left| \prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)}^m - \prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{n!} \quad \forall\, m \geq N_\sigma$.

Wir definieren

$$N := \max\{N_\sigma \mid \sigma \in S_n\} \quad (\text{beachte: } |S_n| < \infty).$$

$$\Rightarrow \left| \prod_{k=1}^{n} a^{m}_{k\sigma(k)} - \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{n!} \quad \forall m \geq N \text{ und } \forall \sigma \in \mathcal{S}_n.$$

Damit berechnen wir:

$$|\det A^m - \det A| \overset{\text{Leibniz}}{=} \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a^{m}_{k\sigma(k)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \right|$$

$$= \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{k=1}^{n} a^{m}_{k\sigma(k)} - \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \right) \right|$$

$$\leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \underbrace{|\operatorname{sgn}(\sigma)|}_{=1} \underbrace{\left| \prod_{k=1}^{n} a^{m}_{k\sigma(k)} - \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \right|}_{< \frac{\varepsilon}{n!}}$$

$$< \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\varepsilon}{n!} = n! \cdot \frac{\varepsilon}{n!} = \varepsilon. \qquad \forall m \geq N$$

$$\Rightarrow \lim_{m \to \infty} \det(A^m) = \det A.$$

- Da die Folge beliebig war, folgt mit 5.1. (ii), dass det in $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig ist. Da $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig war, ist det also in allen Punkten aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ stetig

$$\overset{5.1.(i)}{\Rightarrow} \quad \det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R} \quad \text{ist stetig.}$$

ok.

- Aus der Linearen Algebra I ist bekannt:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0 \} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Es ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen in $\mathbb{R}$, denn $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^c = \{0\}$ ist z.B. nach 3.3. (i) abgeschlossen.

Da det stetig ist, ist also auch $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ offen.

$\Rightarrow GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ ist offen.

$\blacksquare$

5.3. • Wissen: $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}([a,b])$.

Für $f,g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ und $\mu \in \mathbb{R}$ berechnen wir damit:

∘ $$\|f\| = 0 \iff \underbrace{\|f\|_\infty}_{\geq 0} + \underbrace{\|f'\|_\infty}_{\geq 0} = 0$$

$$\iff \|f\|_\infty = 0 \text{ und } \|f'\|_\infty = 0$$

$$\iff \|f\|_\infty = 0 \qquad \left(\text{denn: } \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow \|f'\|_\infty = 0\right)$$

$$\iff f = 0$$

ok.

∘ $$\|\mu \cdot f\| = \|\mu \cdot f\|_\infty + \|(\mu \cdot f)'\|_\infty = \|\mu \cdot f\|_\infty + \|\mu \cdot f'\|_\infty$$

$$= |\mu| \cdot \|f\|_\infty + |\mu| \cdot \|f'\|_\infty = |\mu| \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$$

$$= |\mu| \cdot \|f\|$$

ok.

∘ $$\|f+g\| = \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty$$

$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$$

$$= \|f\| + \|g\|$$

ok.

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}^1([a,b])$.

• Sei $\psi : \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$.

Sei $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ ein fester Punkt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}^1([a,b])$ welche bzgl. $\|\cdot\|$ gegen f konvergiert.

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f\| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \underbrace{\|(f_n - f)'\|_\infty}_{\geq 0 \text{ da Norm}} = \|f_n - f\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad (*)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, d.h. nach Vorlesung Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \overset{\text{Vorlesung}}{=} \int_a^b f(x)\,dx = \Psi(f)$$

Also: Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^1([a,b])$ die bzgl. $\|\cdot\|$ gegen f Konvergiert, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(f_n) = \Psi(f).$$

$\overset{5.1.(ii)}{\Rightarrow}$ Ψ ist in $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ stetig.

Da $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ beliebig war, ist Ψ in allen Punkten stetig und damit nach Aufgabe 5.1. (i) insgesamt stetig.

- Offensichtlich ist Ψ auch stetig, wenn $\|\cdot\|$ durch $\|\cdot\|_\infty$ ersetzt wird. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen f, dann Konvergiert die Folge wie oben gleichmäßig gegen f, also liefert obiges Argument auch mit $\|\cdot\|_\infty$ die StetigKeit von Ψ in f.
- Sei $\tau: \mathcal{C}^2([a,b]) \to \mathcal{C}^1([a,b]),\ f \mapsto f'$.

  Sei wieder $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ ein fester Punkt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}^2([a,b])$ die bzgl. $\|\cdot\|$ gegen f Konvergiert.

  Genau wie eben folgt dann:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergiert gleichmäßig gegen f.

Verwenden wir oben anstatt (*) die Abschätzung

$$\|f_n' - f'\|_\infty = \|(f_n-f)'\|_\infty \leq \|f_n-f\|_\infty + \|(f_n-f)'\|_\infty = \|f_n-f\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

dann erhalten wir analog:

$(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergiert gleichmäßig gegen f'.

$$\overset{VL}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \|f_n' - f'\|_\infty = 0, \text{ d.h. } \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \varphi(f) \quad (\text{bzgl. } \|\cdot\|_\infty\ !)$$

$\overset{5.1.(ii)}{\Longrightarrow}$ φ ist in f stetig.

Also ist φ in allen Punkten $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ stetig und damit nach 5.1. (i) insgesamt stetig.

- φ ist unstetig, wenn wir $\mathcal{C}^2([a,b])$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ausstatten, betrachte z.B. $a=0$, $b=1$ und $f_n \in \mathcal{C}^2([0,1])$ mit

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n\cdot x).$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty = \sup\{|\tfrac{1}{n}\sin(nx)| \mid x\in[0,1]\} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen die Nullfunktion $0 \in \mathcal{C}^2([0,1])$

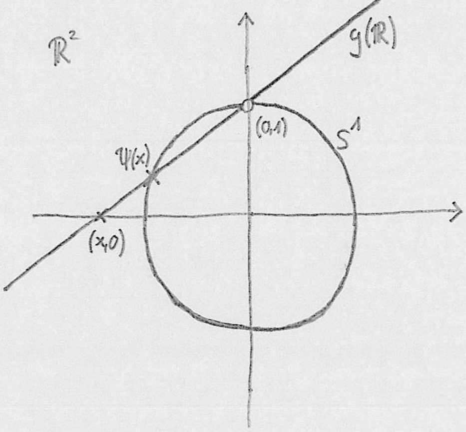
Aber: $$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim_{n\to\infty} \cos(n\cdot 0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

d.h. f_n' Konvergiert nicht punktweise gegen $0 = 0'$ also auch nicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathcal{C}^1([0,1])$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) \neq \varphi(0)$ d.h. φ ist in diesem Fall nicht stetig.

$\blacksquare$

5.4. (i) • Wir „parametrisieren" für $x \in \mathbb{R}$ die Gerade durch $(x,0)$ und $(0,1)$:



$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto (x,0) + t\big((0,1)-(x,0)\big)$$

d.h. $g(0) = (x,0)$, $g(1) = (0,1)$.

Schnittpunkte mit dem Einheitskreis:

$$\|g(t)\|_2 = 1 \iff \|g(t)\|_2^2 = 1 \iff (x-tx)^2 + t^2 = 1$$

$$\iff x^2 - 2tx^2 + t^2x^2 + t^2 - 1 = 0$$

$$\iff t^2(x^2+1) + t(-2x^2) + (x^2-1) = 0$$

$$\iff t = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4 - 4(x^2+1)(x^2-1)}}{2(x^2+1)}$$

$$\iff t = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4 - 4x^4 + 4}}{2(x^2+1)}$$

$$\iff t = 1 \quad \text{oder} \quad t = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

↑ liefert Punkt $(0,1)$, also nicht den gesuchten Schnittpunkt!

Es ist

$$g\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \left(x\left(1-\frac{x^2-1}{x^2+1}\right), \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$\Rightarrow$ Die explizite Formel für $\psi: \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{(0,1)\}$ lautet also

$$\psi(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$\Rightarrow$ ψ ist stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen.

• Noch zu zeigen: ψ bijektiv und ψ^{-1} ist stetig.

Wir berechnen Ψ^{-1} ebenfalls heuristisch:

Sei $(x,y) \in S^1 \setminus \{(0,1)\}$, d.h. insbesondere ist $x^2+y^2=1$.

Die Gerade durch (x,y) und $(0,1)$ wird parametrisiert durch:

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x,y) + t\big((0,1)-(x,y)\big)$$

Schnittpunkt mit „reeller Achse":

$$h(t) = (z,0) \iff y + t(1-y) = 0 \overset{\text{beachte: } y \neq 1}{\iff} t = \frac{-y}{1-y}.$$

Konkreter Schnittpunkt:

$$z = x - \left(\frac{-y}{1-y}\right)x = \frac{x(1-y)+xy}{1-y} = \frac{x}{1-y}.$$

Also: Es müsste $\Psi^{-1}: S^1 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ durch

$$\Psi^{-1}((x,y)) = \frac{x}{1-y} \qquad \text{gegeben sein.}$$

Damit wäre Ψ^{-1} ebenfalls stetig und Ψ ein Homöomorphismus.

Wir prüfen:

- $$\Psi^{-1} \circ \Psi(x) = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot 2} = x \qquad \text{ok.}$$

- $$\Psi \circ \Psi^{-1}((x,y)) = \left(\frac{2\left(\frac{x}{1-y}\right)}{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2+1}, \frac{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2-1}{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2+1} \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{2x}{1-y}}{\frac{x^2+(1-y)^2}{(1-y)^2}}, \frac{x^2-(1-y)^2}{x^2+(1-y)^2} \right) = \left(\frac{2x(1-y)}{x^2+1-2y+y^2}, \frac{1-y^2-1+2y-y^2}{1-y^2+1-2y+y^2} \right)$$

$$= \left(\frac{x(2-2y)}{x^2+1-2y+1-x^2} , \frac{-2y^2+2y}{2-2y} \right) = (x,y) \qquad \text{ok.}$$

wobei wir $x^2+y^2=1$ ausgenutzt haben.

$\Rightarrow$ ψ ist tatsächlich bijektiv mit Umkehrabbildung ψ^{-1} also ist ψ mit obigem Argument ein Homöomorphismus.

(ii) Da $\hat{f}$ auf $S^1 \setminus \{(0,1)\}$ stetig ist, genügt es nach 5.1. zu zeigen, dass $\hat{f}$ auch in $(0,1)$ stetig ist.

↯ $\hat{f}$ ist in $(0,1)$ nicht stetig.

- $\overset{5.1.}{\Rightarrow}$ $\exists$ Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von c so dass für alle Umgebungen $V \subset S^1$ von $(0,1)$ gilt: $\hat{f}(V) \not\subset U$.

U Umgebung von c $\Rightarrow$ Für ein $\tau > 0$ ist $(c-\tau, c+\tau) = U_\tau(c) \subset U$

$\Rightarrow$ $\forall$ Umgebungen $V \subset S^1$ von $(0,1)$ ist $\hat{f}(V) \not\subset (c-\tau, c+\tau)$. $(*)$

- Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, dann ist $U_\varepsilon((0,1)) \subset \mathbb{R}^2$ offen.

$\overset{\text{Rel. topologie}}{\Longrightarrow}$ $U_\varepsilon((0,1)) \cap S^1$ ist offene Umgebung von $(0,1)$ in S^1.

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ ist $\hat{f}(U_\varepsilon((0,1)) \cap S^1) \not\subset (c-\tau, c+\tau)$.

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $p_n \in S^1 \setminus \{(0,1)\}$ mit $\hat{f}(p_n) \not\subset (c-\tau, c+\tau)$

und $d(p_n, (0,1)) < \sqrt{\frac{4}{n^2+1}}$

Spezielles $\varepsilon > 0$. Man versucht es zunächst mit „$< \frac{1}{n}$" und sieht schließlich, dass diese Zahl hier am besten passt!

Wir definieren nun $x_n := \Psi^{-1}(p_n) \in \mathbb{R}$. Dann:

$\forall n \in \mathbb{N}$ ist $d\left(\Psi(x_n), (0,1)\right) < \sqrt{\frac{4}{n^2+1}}$ und $f(x_n) = f\left(\Psi^{-1}(\Psi(x_n))\right)$

$$= \hat{f}(p_n) \notin (c-\tau, c+\tau).$$

- Berechnen für $x \in \mathbb{R}$:

$$d\left(\Psi(x), (0,1)\right)^2 = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1\right)^2 = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{(x^2-1-x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2+4}{(x^2+1)^2} = \frac{4}{x^2+1}.$$

Damit: $d\left(\Psi(x_n), (0,1)\right) < \sqrt{\frac{4}{n^2+1}}$

$$\overset{\text{Quadrieren}}{\Longleftrightarrow} \frac{4}{x_n^2+1} < \frac{4}{n^2+1} \Longleftrightarrow \frac{x_n^2+1}{4} > \frac{n^2+1}{4}$$

$$\Longleftrightarrow x_n^2 > n^2 \Longleftrightarrow |x_n| > n.$$

Also: $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $|x_n| > n$ und $f(x_n) \notin (c-\tau, c+\tau)$ $\quad (**)$
(für unsere Konstruierten x_n).

- Wir wählen in $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Glieder alle dasselbe Vorzeichen haben. Wegen $(**)$ gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty \quad (\text{bzw. } -\infty) \quad \text{aber} \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) \neq c. \ \lightning$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = c$

$\Rightarrow \hat{f}$ muss in $(0,1)$ doch stetig sein!

- Anschauung: Wenn wir uns in $\mathbb{R}$ ∞ oder $-\infty$ nähern, dann nähern wir uns (vermöge Ψ) in S^1 stets dem Punkt $(0,1)$.

Auf S^1 bedeutet die Bedingung

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = c$$

also: Egal mit welcher Folge wir uns in S^1 dem Punkt $(0,1)$ nähern, die Funktionswerte an den Folgengliedern konvergieren gegen $c \in \mathbb{R}$ – das ist genau was wir bei Stetigkeit erwarten.

Indem wir in S^1 den Punkt $(0,1)$ zu $\mathbb{R}$ hinzugefügt haben, haben wir also durch eine geeignete Topologie dem Punkt $(0,1)$ genau die Bedeutung von „∞" gegeben.

$\blacksquare$