Analysis II, WiSe 2012\2013 – Lösung Blatt 6

6.1. (i) Wir zeigen, dass $X \setminus K$ offen ist.

Sei dazu $p \in X \setminus K$ beliebig.

- Ist $x \in K$, dann existieren wegen der Hausdorff-Eigenschaft Umgebungen $\tilde{U}_x$ um p und $\tilde{V}_x$ um x mit

$$\tilde{U}_x \cap \tilde{V}_x = \emptyset$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine offene Menge U_x mit $p \in U_x$, $U_x \subset \tilde{U}_x$ und eine offene Menge V_x mit $x \in V_x$ und $V_x \subset \tilde{V}_x$.

Wegen $\tilde{U}_x \cap \tilde{V}_x = \emptyset$ ist auch $U_x \cap V_x = \emptyset$.

- Da stets $x \in V_x$ für $x \in K$ gilt, ist

$$K \subset \bigcup_{x \in K} V_x \,,$$

d.h. wir haben eine offene Überdeckung von K konstruiert.

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $\exists\ x_1, \dots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$$

Wir definieren nun $U_p := \bigcap_{j=1}^{m} U_{x_j}$.

$\Rightarrow$ U_p ist offen (als Durchschnitt endlich vieler offener Mengen) und es gilt $p \in U_p$.

- Für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ folgt nun

  $U_p \subset U_{x_j}$ und wegen $U_{x_j} \cap V_{x_j} = \emptyset$ auch $U_p \cap V_{x_j} = \emptyset$.

  $$\Rightarrow U_p \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j} \right) = \emptyset$$

  Wegen $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$ ist also auch $U_p \cap K = \emptyset$.

- <u>Also:</u> Wir haben für alle $p \in X \setminus K$ eine offene Menge $U_p \subset X \setminus K$ mit $p \in U_p$ konstruiert.

  $\Rightarrow X \setminus K = \bigcup_{p \in X \setminus K} U_p$ offen als Vereinigung offener Mengen.

  $\Rightarrow K$ ist abgeschlossen.

(ii) • Sei

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine beliebige offene Überdeckung der Menge $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

Zu zeigen: Es gibt eine endliche Teilüberdeckung.

Für festes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i .$$

$\Rightarrow$ Die vorgelegte offene Überdeckung ist auch eine offene Überdeckung der kompakten Menge A_k.

$\Rightarrow$ Es gibt für A_k eine endliche Teilüberdeckung, d.h. eine Menge $I_k \subset I$ mit $\# I_k < \infty$ und

$$A_k \subset \bigcup_{i \in I_k} U_i . \qquad (*)$$

Wir definieren nun $J := I_1 \cup \dots \cup I_n \subset I$.

Da alle I_k endlich sind, ist auch $J \subset I$ eine endliche Menge und wegen $(*)$ gilt:

$$A_k \subset \bigcup_{i \in I_k} U_i \overset{I_k \subset J}{\subset} \bigcup_{i \in J} U_i \qquad \forall\, k \in \{1, \dots, n\} .$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \subset \bigcup_{i \in J} U_i$$

Wir haben also zu der vorgelegten beliebigen offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung konstruiert, d.h. die Menge $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ ist kompakt.

- Es ist

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subset A_1 \leftarrow \text{kompakte Menge.}$$

Da die A_j kompakt sind, sind sie nach Teil (i) insbesondere abgeschlossen.

$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow} \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ ist abgeschlossen als Durchschnitt abgeschlossener Mengen

Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ nach Vorlesung aber kompakt.

$\blacksquare$

6.2. (i) • Behauptung: Für eine beliebige Abbildung $f: X \to Y$ und eine Menge $U \subset Y$ gilt stets:

$$f^{-1}(U^c) = \left(f^{-1}(U)\right)^c \qquad (*)$$

Denn: $x \in f^{-1}(U^c) \Leftrightarrow f(x) \in U^c \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus U$

$\Leftrightarrow f(x) \notin U \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(U)$

$\Leftrightarrow x \in \left(f^{-1}(U)\right)^c$ ok.

• Damit zur Aufgabe:

∘ Sei $f: X \to Y$ stetig und $A \subset Y$ abgeschlossen.

$\Rightarrow A^c = Y \setminus A$ ist offen in Y

$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f^{-1}(A^c) \subset X$ ist offen.

Also: $\left(f^{-1}(A)\right)^c \overset{(*)}{=} f^{-1}(A^c) \subset X$ ist offen

$\Rightarrow f^{-1}(A) \subset X$ ist abgeschlossen. ok.

∘ Sei nun $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen für alle $A \subset Y$ abgeschlossen.

Ist $U \subset Y$ offen, dann: $U^c = Y \setminus U$ ist abgeschlossen.

$\Rightarrow \left(f^{-1}(U)\right)^c \overset{(*)}{=} f^{-1}(U^c)$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung.

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ ist offen.

Da $U \subset Y$ offen beliebig war, folgt: f ist stetig. ok.

(ii) Da f bijektiv ist, existiert

$$g := f^{-1} : Y \to \hat{X}$$

als Abbildung. Da f stetig ist, genügt es zu zeigen, dass g stetig ist. Wir verwenden hierfür das Kriterium aus Teil (i):

Sei $A \subset \hat{X}$ abgeschlossen. Zu zeigen: $g^{-1}(A) \subset Y$ ist abgeschlossen.

Da $\hat{X}$ kompakt und $A \subset \hat{X}$ abgeschlossen ist, folgt nach Vorlesung: A ist kompakt.

Da f stetig ist, ist $f(A) \subset Y$ ebenfalls kompakt (Vorlesung).

$\overset{6.1.(i)}{\Longrightarrow}$ $f(A) \subset Y$ ist abgeschlossen.

Nun berechnen wir:

$$\begin{aligned} g^{-1}(A) &= \{y \in Y \mid g(y) \in A\} = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \in A\} \\ &= \{y \in Y \mid f^{-1}(y) = a \text{ für ein } a \in A\} \\ &= \{y \in Y \mid y = f(a) \text{ für ein } a \in A\} \\ &= f(A) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $g^{-1}(A) \subset Y$ ist abgeschlossen.

Da $A \subset \hat{X}$ abgeschlossen beliebig war, folgt mit (i): $g = f^{-1}$ ist stetig. Also ist f ein Homöomorphismus.

(iii) Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die Topologien

$$\mathfrak{X}_1 := \mathcal{P}(\mathbb{R}) \qquad \text{(diskrete Topologie)}$$

$$\mathfrak{X}_2 := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \qquad \text{(indiskrete Topologie)}$$

- Dann ist $id: (\mathbb{R}, \mathfrak{X}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{X}_2)$, $x \longmapsto x$

eine bijektive Abbildung, welche wegen

$$id^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{X}_1$$
$$id^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathfrak{X}_1$$

d.h. $id^{-1}(A) \in \mathfrak{X}_1 \quad \forall A \in \mathfrak{X}_2$ stetig ist.

- Die Umkehrabbildung ist:

$$id^{-1} = id: (\mathbb{R}, \mathfrak{X}_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{X}_1).$$

Diese ist nicht stetig, denn z.B. für $\{0\} \in \mathfrak{X}_1$ ist

$$id^{-1}(\{0\}) = \{0\} \notin \mathfrak{X}_2.$$

$\Rightarrow$ $id: (\mathbb{R}, \mathfrak{X}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{X}_2)$ ist kein Homöomorphismus.

(<u>Bemerkung:</u> Obiges Argument zeigt wegen Teil (ii) insbesondere, dass der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ nicht kompakt ist.)

$\blacksquare$

6.3. • X ist kompakt und $f: X \to \mathbb{R}$ stetig.

$\overset{\text{VL}}{\Longrightarrow}$ $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

$\overset{\text{Heine-}}{\underset{\text{Borel}}{\Longrightarrow}}$ $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Wegen der Beschränktheit von $f(X)$ existieren

$$m := \inf f(X) \quad \text{und} \quad M := \sup f(X)$$

in $\mathbb{R}$. Nach Definition von inf und sup existieren also Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(X) \subset \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = M.$$

• $\nearrow$ $m \notin f(X) \overset{x_n \in f(X)}{\Longrightarrow} m \neq x_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Ist U eine beliebige Umgebung von $m \in \mathbb{R}$, dann ist

$$U_\varepsilon(m) \subset U \quad \text{für } \varepsilon > 0 \text{ geeignet.}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = m$ $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - m| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

Insbesondere: $|x_N - m| < \varepsilon$, d.h. $x_N \in U_\varepsilon(m) \subset U$

Also wegen $x_N \in f(X)$: $(U \cap f(X)) \setminus \{m\} \neq \emptyset$.

$\overset{U \text{ beliebig}}{\Longrightarrow}$ m ist Häufungspunkt von $f(X)$

$\Longrightarrow$ $m \in \overline{f(X)} = f(X)$ (da $f(X)$ abgeschlossen) $\lightning$

Also folgt doch: $m \in f(X)$. Analog: $M \in f(X)$.

$\Longrightarrow \exists\, x, y \in X$ mit $f(x) = m = \inf f(X) = \min f(X)$ (da $m \in f(X)$)

und $f(y) = M = \sup f(X) = \max f(X)$ (da $M \in f(X)$).

$\blacksquare$

6.4. • <u>Behauptung:</u> $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ ist Kompakt in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, d.h. Kompakt bezüglich der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Topologie.

<u>Denn:</u> Betrachte

$$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|_2.$$

Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann:

$$\|x\|_2 = \|(x-y)+y\|_2 \leq \|x-y\|_2 + \|y\|_2$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 - \|y\|_2 \leq \|x-y\|_2$$

Damit: $\|y\|_2 - \|x\|_2 \leq \|y-x\|_2 = \|x-y\|_2.$

Also:
$$\big|\, \|x\|_2 - \|y\|_2 \,\big| = \begin{cases} \|x\|_2 - \|y\|_2 & \text{falls } \|x\|_2 \geq \|y\|_2 \\ \|y\|_2 - \|x\|_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\leq \|x-y\|_2.$$

Hieraus folgt, dass h stetig ist, denn ist $\varepsilon > 0$ beliebig, dann wähle $\delta := \varepsilon$. Damit folgt dann für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x-y\|_2 < \delta \Rightarrow |h(x) - h(y)| = \big|\, \|x\|_2 - \|y\|_2 \,\big| \overset{\text{s.o.}}{\leq} \|x-y\|_2 < \delta = \varepsilon.$$

Mit Aufgabe 5.1. (ii) folgt hieraus die Stetigkeit von h.

Da $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, ist nach Aufgabe 6.2. (i) auch $S = h^{-1}(\{1\}) \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

Wegen $S \subset U_2(0)$ ist S beschränkt.

$\overset{\text{Heine-Borel}}{\Longrightarrow}$ S ist Kompakt.

ok.

• <u>Behauptung:</u> Die Funktion $g: S \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ nimmt auf S ihr Maximum und Minimum an.

<u>Dazu:</u> Wir dehnen g zu einer Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ aus:

$$\hat{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|.$$

Es genügt zu zeigen, dass $\hat{g}$ (bzgl. $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$) stetig ist, denn dann können wir folgendermaßen argumentieren:

Trägt S die Relativtopologie, dann ist $g: S \to \mathbb{R}$ stetig, denn ist $U \subset \mathbb{R}$ offen, dann ist

$$g^{-1}(U) = \underbrace{\hat{g}^{-1}(U)}_{\substack{\text{offen im } \mathbb{R}^n\text{, da} \\ \hat{g} \text{ stetig}}} \cap S$$

also ist $g^{-1}(U) \subset S$ per Definition der Relativtopologie offen. Da $U \subset \mathbb{R}$ offen beliebig war, ist g stetig.

Da $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, ist S mit der Relativtopologie per Definition ein kompakter topologischer Raum, welcher hausdorffsch ist, da $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ nach Vorlesung hausdorffsch ist.

$\overset{6.3.}{\Longrightarrow}$ $\exists\, m, M \in S$ mit $g(m) = \min g(S)$ und $g(M) = \max g(S)$, also nimmt g auf S sein Maximum und Minimum an.

Wir zeigen also die Stetigkeit von $\hat{g}$.

Zunächst folgt mit demselben Argument wie in der ersten Behauptung:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (*)$$

Sei nun $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und

$$d := \sum_{j=1}^{n} \|e_j\| > 0 .$$

Ist $x \in \mathbb{R}^n$, dann berechnen wir:

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \|e_j\| \overset{|x_j| \leq \|x\|_2 \; \forall j}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \|x\|_2 \cdot \|e_j\|$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\| \right) \cdot \|x\|_2$$

Also: $\|x\| \leq d \cdot \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. $\qquad (**)$

Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, dann wählen wir $\delta := \frac{\varepsilon}{d} > 0$. Sind dann $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x-y\|_2 < \delta$, dann folgt:

$$|\hat{g}(x) - \hat{g}(y)| = \big| \|x\| - \|y\| \big| \overset{(*)}{\leq} \|x-y\| \overset{(**)}{\leq} d \|x-y\|_2 < d \cdot \delta = d \cdot \frac{\varepsilon}{d} = \varepsilon .$$

$\Rightarrow$ Nach Aufgabe 5.1. (ii) ist $\hat{g}$ stetig und die Behauptung vollständig gezeigt.

ok.

- Damit zeigen wir die Äquivalenz von $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|$:

Wegen der zweiten Behauptung existieren $m, M \in S$ mit

$$g(m) \leq g(z) \leq g(M) \qquad \forall z \in S.$$

Wir definieren $C_1 := g(m)$, $C_2 := g(M)$. Da $g(z) = \|z\| \geq 0 \;\forall z \in S$ gilt ist $C_1 \geq 0$ und $C_2 \geq 0$. Wegen $\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ folgt wegen $0 \notin S$ sogar $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ und wir haben

$$C_1 \leq g(z) \leq C_2 \qquad \forall z \in S. \qquad (***)$$

Ist nun $x = 0$, dann gilt

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\| \leq C_2 \|x\|_2 \quad \text{trivialerweise.}$$

Sei also $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$.

$\Rightarrow \|x\|_2 \neq 0$ und $\left\| \frac{1}{\|x\|_2} \cdot x \right\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2} \cdot \|x\|_2 = 1$, d.h.

es ist $\frac{1}{\|x\|_2} \cdot x \in S$.

Also folgt aus (***):

$$C_1 \leq g\left(\frac{1}{\|x\|_2} \cdot x\right) \leq C_2$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1 \leq \left\| \frac{1}{\|x\|_2} \cdot x \right\| \leq C_2$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1 \leq \frac{1}{\|x\|_2} \cdot \|x\| \leq C_2$$

$$\overset{\|x\|_2 > 0}{\Longleftrightarrow} \quad C_1 \|x\|_2 \leq \|x\| \leq C_2 \|x\|_2 .$$

Also ist die erforderliche Gleichung $\forall x \in \mathbb{R}^n$ nachgewiesen.

$\Rightarrow$ Die Normen sind äquivalent.

- Seien nun $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ und

  $\mathfrak{X}$ die von $\|\cdot\|$ induzierte Topologie

  $\mathfrak{X}'$ die von $\|\cdot\|'$ induzierte Topologie.

Zu zeigen: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'$.

Nach dem ersten Teil existieren $C_1, C_2, D_1, D_2 > 0$ mit

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\| \leq C_2 \|x\|_2 \;, \quad D_1 \|x\|_2 \leq \|x\|' \leq D_2 \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \|x\| \le C_2 \|x\|_2 \le \frac{C_2}{D_1}\|x\|' \\ \quad \|x\| \ge C_1 \|x\|_2 \ge \frac{C_1}{D_2}\|x\|' \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{C_1}{D_2}}_{=: E_1}\|x\|' \le \|x\| \le \underbrace{\frac{C_2}{D_1}}_{=: E_2}\|x\|' \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow \|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent. Bezeichnen mit

$U_\varepsilon(p)$ die offene ε-Umgebung um p bzgl. $\|\cdot\|$

$U'_\varepsilon(p)$ die offene ε-Umgebung um p bzgl. $\|\cdot\|'$.

Haben

$$\|p-x\| < \varepsilon \Rightarrow \|p-x\|' \le \frac{1}{E_1}\|p-x\| < \frac{\varepsilon}{E_1} \Rightarrow U_\varepsilon(p) \subset U'_{\frac{\varepsilon}{E_1}}(p)$$

sowie

$$\|p-x\|' < \varepsilon \Rightarrow \|p-x\| \le E_2 \|p-x\|' < E_2\varepsilon \Rightarrow U'_\varepsilon(p) \subset U_{E_2\varepsilon}(p).$$

Damit:

- Ist $U \in \mathfrak{X}$ und $p \in U$ beliebig.

  $\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} U_\varepsilon(p) \subset U$ für $\varepsilon > 0$ geeignet.

  $\Rightarrow U'_{\frac{\varepsilon}{E_2}}(p) \subset U_\varepsilon(p) \subset U$

  $\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} U \in \mathfrak{X}'$.

- Ist $U \in \mathfrak{X}'$ und $p \in U$ beliebig.

  $\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} U'_\varepsilon(p) \subset U$ für $\varepsilon > 0$ geeignet.

  $\Rightarrow U_{E_1\varepsilon}(p) \subset U'_\varepsilon(p) \subset U$

  $\overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} U \in \mathfrak{X}$.

Also folgt: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'$, d.h. die induzierten Topologien sind gleich. ∎