Analysis II, WiSe 2012\2013 – Lösung Blatt 7

7.1. (i) Wir berechnen $\gamma': \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \exp(t)\cos(2\pi t) - 2\pi \exp(t)\sin(2\pi t) \\ \exp(t)\sin(2\pi t) + 2\pi\exp(t)\cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$= \exp(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) - 2\pi \sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) + 2\pi \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|_2^2 = \exp(t)^2 \cdot \left((\cos(2\pi t) - 2\pi\sin(2\pi t))^2 + (\sin(2\pi t) + 2\pi\cos(2\pi t))^2 \right)$$

$$= \exp(t)^2 \cdot \big(\cos^2(2\pi t) - 4\pi\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) + 4\pi^2\sin^2(2\pi t)$$
$$+ \sin^2(2\pi t) + 4\pi\sin(2\pi t)\cos(2\pi t) + 4\pi^2\cos^2(2\pi t) \big)$$

$$= (1 + 4\pi^2)\exp(t)^2$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{1+4\pi^2}\exp(t) \qquad (\text{da } \exp(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \sqrt{1+4\pi^2}\int_a^b \exp(t)\,dt$$

$$= \sqrt{1+4\pi^2}\,(\exp(b) - \exp(a)).$$

ok.

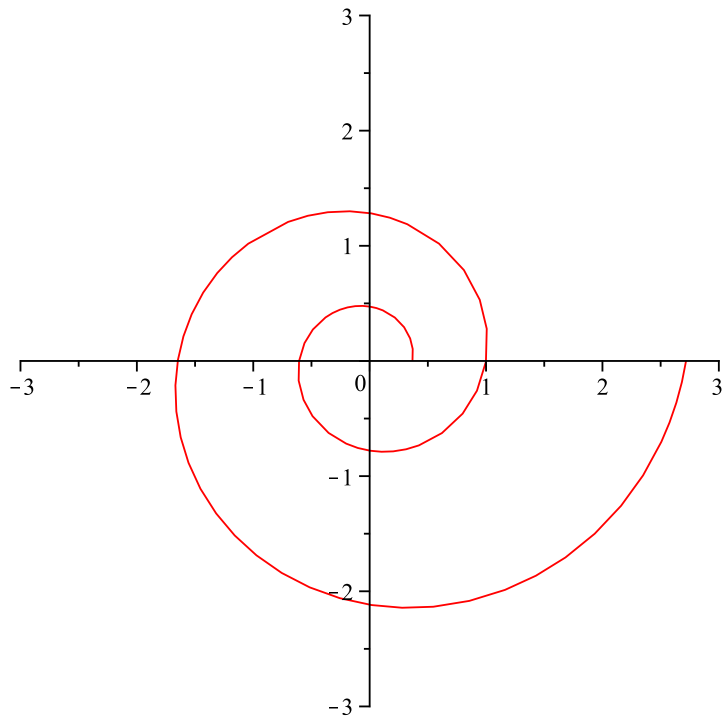
Da nach Analysis I $\lim_{a \to -\infty} \exp(a) = 0$ gilt (Limes existiert), existiert auch $\lim_{a\to-\infty} L(\gamma|_{[a,0]})$ und es ist:

$$\lim_{a\to-\infty} L(\gamma|_{[a,0]}) = \sqrt{1+4\pi^2}\left(\exp(0) - \lim_{a\to-\infty}\exp(a)\right)$$

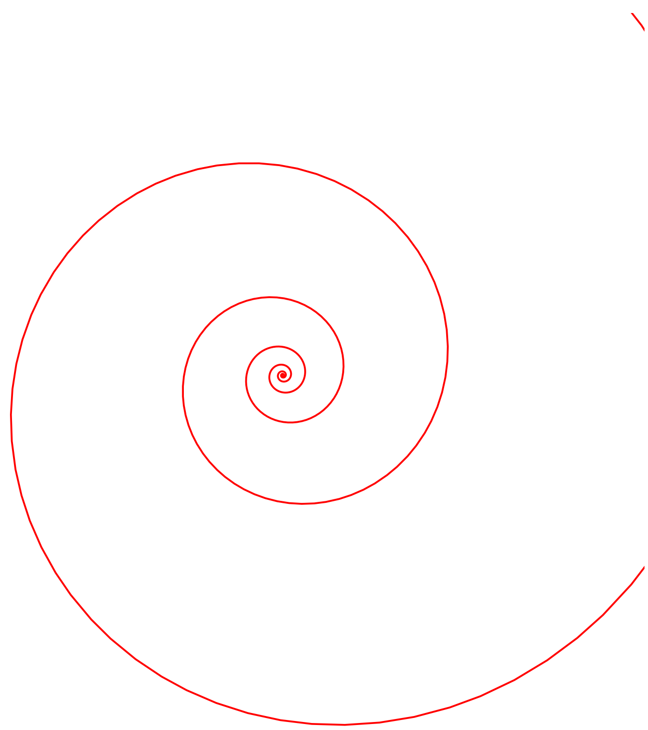
$$= \sqrt{1+4\pi^2}.$$

ok.

(ii) Skizze von $\varphi|_{[-1,1]}$:



Skizze von $\varphi|_{[-15,15]}$:



7.2. (i) • Da f stetig differenzierbar ist, ist für alle $t \in (a,b]$:

$$L(f|_{[a,t]}) = \int_a^t \|f'(s)\|_2 \, ds$$

Wegen $\int_a^a \|f'(s)\|_2 \, ds = 0$ erhalten wir also folgende Darstellung der Weglängenfunktion:

$$L_f(t) = \int_a^t \|f'(s)\|_2 \, ds$$

• Behauptung (allgemeiner als erforderlich):
Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, dann ist

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

stetig bzgl. $\|\cdot\|$ auf V und $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$.

Dazu:
Sind $v, w \in V$, dann:

$$\|v\| = \|(v-w)+w\| \leq \|v-w\| + \|w\|$$

$$\Rightarrow \|v\| - \|w\| \leq \|v-w\|$$

Damit: $\|w\| - \|v\| \leq \|w-v\| = \|v-w\|$.
Also folgt insgesamt für beliebige $v, w \in V$:

$$\big| \|v\| - \|w\| \big| \leq \|v-w\|.$$ („umgekehrte Dreiecksungleichung")

Ist nun $v \in V$ fixiert und $\varepsilon > 0$ beliebig, dann wählen wir $\delta := \varepsilon > 0$ und erhalten:

$\|v-w\| < \delta \Rightarrow \big| \|v\| - \|w\| \big| \leq \|v-w\| < \delta = \varepsilon$.

Mit Aufgabe 5.1. (ii) folgt hieraus, dass $\|\cdot\|$ im Punkt $v \in V$ stetig ist. Da $v \in V$ beliebig war, folgt mit Aufgabe 5.1. (i), dass $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ insgesamt stetig ist.

OK.

- Da f stetig differenzierbar ist, ist $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Nach obiger Überlegung ist $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, also ist

$$s \mapsto \|f'(s)\|_2$$

stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen.
Wir können also den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden und erhalten:

L_f ist differenzierbar mit $L_f'(t) = \|f'(t)\|_2$.

Da wir bereits gezeigt haben, dass

$$t \mapsto \|f'(t)\|_2$$

stetig ist, ist L_f' als Abbildung stetig.

$\Rightarrow L_f$ ist stetig differenzierbar.

(ii) • Zunächst ist $L_f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nach Teil (i) stetig differenzierbar.

- Seien nun t_1, t_2 mit $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ gegeben. Wir zeigen:

$$L_f(t_1) < L_f(t_2)$$

Dazu wählen wir $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ mit $a \leq t_1 < \eta_1 < \eta_2 < t_2 \leq b$.
Wie in Teil (i) ist die Funktion

$$h : [\eta_1, \eta_2] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|f'(t)\|_2$$

stetig. Nach Voraussetzung ist $f'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [\eta_1, \eta_2]$

$$\Rightarrow \quad h(t) = \|f'(t)\|_2 > 0 \qquad \forall t \in [\eta_1, \eta_2].$$

Da $[\eta_1, \eta_2]$ kompakt ist, existiert nach dem Satz vom Maximum und Minimum ein $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ mit

$$h(\eta) \leq h(t) \qquad \forall t \in [\eta_1, \eta_2].$$

Wir definieren $c := h(\eta)$, dann gilt $c > 0$ und

$$c \leq h(t) \qquad \forall t \in [\eta_1, \eta_2].$$

Damit berechnen wir nun:

$$L_f(t_2) = \int_a^{t_2} \|f'(s)\|_2 \, ds \overset{\text{Analysis I}}{=} \int_a^{t_1} \|f'(s)\|_2 \, ds + \int_{t_1}^{\eta_1} \|f'(s)\|_2 \, ds$$

$$+ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \|f'(s)\|_2 \, ds + \int_{\eta_2}^{t_2} \|f'(s)\|_2 \, ds$$

Monotonie des Integrals

$$\geq L_f(t_1) + \underbrace{\int_{t_1}^{\eta_1} 0 \, ds}_{=0} + \underbrace{\int_{\eta_1}^{\eta_2} c \, ds}_{>0} + \underbrace{\int_{\eta_2}^{t_2} 0 \, ds}_{=0}$$

$$> L_f(t_1)$$

Also haben wir gezeigt: $L_f(t_1) < L_f(t_2)$

$\Rightarrow L_f$ ist streng monoton wachsend.

- Da L_f streng monoton wachsend ist, ist L_f insbesondere injektiv und wegen $L_f(a) = 0$ und

$$L_f(b) = \int_a^b \|f'(s)\|_2 \, ds = L(f) = L$$

folgt: $L_f([a,b]) \subset [0,L]$, d.h. es ist

$$L_f : [a,b] \longrightarrow [0,L].$$

Da L_f stetig ist gibt es nach dem Zwischenwertsatz zu jedem $s \in [0,L]$ ein $t \in [a,b]$ mit $L_f(t) = s$.

$\Rightarrow L_f : [a,b] \to [0,L]$ ist surjektiv also bijektiv.

$\Rightarrow$ Insbesondere können wir die Abbildung $L_f^{-1} : [0,L] \to [a,b]$ betrachten.

- Da $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt ist, folgt aus Aufgabe 6.2. (ii) zunächst: L_f^{-1} ist stetig.

- Da L_f streng monoton wachsend und differenzierbar ist, folgt aus dem Satz über die Umkehrfunktion (vgl. Analysis I): L_f^{-1} ist differenzierbar, mit

$$(L_f^{-1})'(t) = \frac{1}{L_f'(L_f^{-1}(t))}.$$

$\Rightarrow (L_f^{-1})'$ ist als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig

$\Rightarrow L_f^{-1}$ ist stetig differenzierbar.

- Also haben wir gezeigt: $L_f : [a,b] \to [0,L]$ ist bijektiv und L_f sowie L_f^{-1} sind stetig differenzierbar.

$\Rightarrow L_f$ ist eine differenzierbare Parametertransformation.

- Wir müssen noch zeigen, dass $L_{\hat{f}}(s) = s \quad \forall s \in [0,L]$ gilt.

Zunächst ist $(L_f^{-1})'(t) = \dfrac{1}{L_f'(L_f^{-1}(t))} > 0 \quad \forall t \in [0,L]$

denn da L_f streng monoton wachsend ist, ist nach Analysis I $L_f'(s) > 0 \quad \forall s \in [a,b]$.

Damit:

$$L_{\hat{f}}(s) = \int_0^s \|\hat{f}'(t)\|_2 \, dt$$

Wir schreiben $f = (f_1, \dots, f_n)$. $\Rightarrow \hat{f} = (f_1 \circ L_f^{-1}, \dots, f_n \circ L_f^{-1})$

und:

$$(f_K \circ L_f^{-1})'(t) = f_K'(L_f^{-1}(t)) \cdot (L_f^{-1})'(t) \qquad \forall 1 \le K \le n.$$

Dies können wir wieder zu einem Vektor zusammenfassen:

$$\Rightarrow \hat{f}'(t) = (L_f^{-1})'(t) \cdot f'(L_f^{-1}(t)).$$

$$\Rightarrow L_{\hat{f}}(s) = \int_0^s \|\hat{f}'(t)\|_2 \, dt = \int_0^s \|f'(L_f^{-1}(t))\|_2 \cdot |(L_f^{-1})'(t)| \, dt$$

$$= \int_0^s \|f'(L_f^{-1}(t))\|_2 \cdot (L_f^{-1})'(t) \, dt$$

$$\overset{\text{Substitution}}{=} \int_a^{L_f^{-1}(s)} \|f'(t)\|_2 \, dt = L_f(L_f^{-1}(s)) = s$$

ok.

(iii) Es ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) + \sin(t) + t\cos(t) \\ \cos(t) - \cos(t) + t\sin(t) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|_2 = |t| \left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)^{1/2} = |t| = t \quad \text{da } t \geq 0.$$

$$\Rightarrow L_\gamma(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\|_2 \, dx = \int_0^t x \, dx = \frac{t^2}{2}$$

Also: $L_\gamma : [0, \pi] \longrightarrow [0, \frac{\pi^2}{2}], \quad t \mapsto \frac{t^2}{2}$

und damit:

$$L_\gamma^{-1} : [0, \tfrac{\pi^2}{2}] \longrightarrow [0, \pi], \quad s \mapsto \sqrt{2s}$$

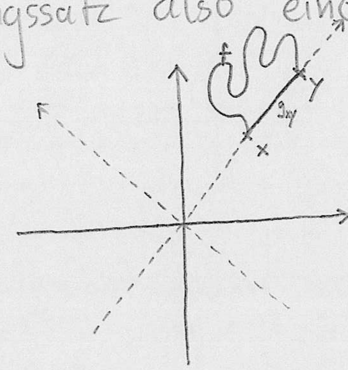
Insbesondere sind alle Voraussetzungen aus (ii) erfüllt und wir erhalten:

$$\hat{\gamma}(s) = \gamma \circ L_\gamma^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2s}) + \sqrt{2s} \cdot \sin(\sqrt{2s}) \\ \sin(\sqrt{2s}) - \sqrt{2s} \cos(\sqrt{2s}) \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

<u>7.3.</u> • Nach Voraussetzung ist $y - x \neq 0$. Wir Können mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungssatz also eine Basis

$$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$$



Die v_2-Komponente sollte Längen-vergrößernd beitragen!

des $\mathbb{R}^n$ Konstruieren, so dass gilt:

$$v_1 = \frac{y-x}{\|y-x\|_2} \quad , \text{d.h.} \quad y - x = \|y-x\|_2 v_1 .$$

Bezeichne nun $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann schreiben wir

$$e_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} v_j \qquad \text{für gewisse } a_{jk} \in \mathbb{R}.$$

• Sei nun $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$. Seien $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ die (stetig differenzierbaren) Komponentenfunktionen von f. Dann:

$$f(s) = \sum_{k=1}^{n} f_k(s) e_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(s) \sum_{j=1}^{n} a_{jk} v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(s) a_{jk} \right)}_{=: \mu_j(s)} v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(s) v_j .$$

$\Rightarrow$ Die $\mu_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar, und:

$$f'(s) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(s) e_k = \sum_{k=1}^{n} f_k'(s) \sum_{j=1}^{n} a_{jk} v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k'(s) a_{jk} \right) v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j'(s) v_j .$$

Also erhalten wir:

$$\|f'(s)\|_2^2 = \langle f'(s), f'(s)\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \mu_j'(s) v_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k'(s) v_k \right\rangle$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \mu_j'(s)\mu_k'(s) \underbrace{\langle v_j, v_k\rangle}_{=\delta_{jk} \text{ da ONB}} = \sum_{k=1}^{n} (\mu_k'(s))^2.$$

$$\Rightarrow \|f'(s)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\mu_k'(s))^2} \geq |\mu_1'(s)| \geq \mu_1'(s). \qquad (*)$$

- Nun berechnen wir noch:

$$\sum_{k=1}^{n} (\mu_k(b) - \mu_k(a)) v_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(b) v_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k(a) v_k$$

$$= f(b) - f(a) = y - x \overset{\text{s.o.}}{=} \|y-x\|_2 v_1.$$

Da die $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ sind, folgt insbesondere:

$$\mu_1(b) - \mu_1(a) = \|y-x\|_2 \qquad (\text{Koeffizientenvergleich!})$$

- Damit berechnen wir nun:

$$L(f) = \int_a^b \|f'(s)\|_2 \, ds \overset{(*)}{\geq} \int_a^b \mu_1'(s) \, ds \overset{\text{HDI}}{=} \mu_1(b) - \mu_1(a) = \|y-x\|_2.$$

Wegen

$$L(g_{xy}) = \int_0^1 \|g_{xy}'(s)\|_2 \, ds = \int_0^1 \|y-x\|_2 \, ds = \|y-x\|_2 \int_0^1 ds = \|y-x\|_2$$

folgt also: $L(f) \geq \|y-x\|_2 = L(g_{xy})$.

$\blacksquare$

Alternativer Beweis (Koordinatenfrei):

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$ und seien $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Komponenten. Wir definieren einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ durch:

$$w := \left(\int_a^b f_1'(s)\,ds, \ldots, \int_a^b f_n'(s)\,ds \right) \overset{\text{HDI}}{=} \left(f_1(b) - f_1(a), \ldots, f_n(b) - f_n(a) \right)$$

$$= y - x.$$

Also ist nach Voraussetzung $w \neq 0$, d.h. $\|w\|_2 \neq 0$. Damit:

$$\|w\|_2^2 = \langle w, w \rangle = \sum_{k=1}^n w_k \cdot \int_a^b f_k'(s)\,ds = \int_a^b \sum_{k=1}^n w_k \cdot f_k'(s)\,ds$$

$$= \int_a^b \langle w, f'(s) \rangle\,ds$$

$$\leq \int_a^b \|w\|_2 \cdot \|f'(s)\|_2\,ds \qquad \text{(Ungleichung von Cauchy-Schwarz)}$$

$$= \|w\|_2 \cdot \int_a^b \|f'(s)\|_2\,ds.$$

Wegen $\|w\|_2 > 0$ haben wir also: $\|w\|_2 \leq \int_a^b \|f'(s)\|_2\,ds$.

Damit:

$$L(f) = \int_a^b \|f'(s)\|_2\,ds \geq \|w\|_2 \overset{\text{s.o.}}{=} \|y-x\|_2 \overset{\text{wie eben.}}{=} L(g_{xy})$$

$\blacksquare$

Bemerkung:

Aus beiden Beweisen kann man mit einer Zusatzüberlegung folgern: $L(f) = L(g_{xy})$ gilt genau dann, wenn f durch eine Parametertransformation aus g_{xy} hervorgeht, d.h. selbst eine Gerade ist.

7.4. Vorab sei

$c_n :=$ # geradlinige Seitenstücke in S_n

$\ell_n :=$ Länge eines geradlinigen Seitenstücks in S_n.

Nach dem Konstruktionsverfahren ist $c_1 = 3$ und in der Konstruktion von S_{n+1} aus S_n wird jede Seite von S_n durch 4 neue Seiten ersetzt, d.h. es gilt die Formel

$$c_{n+1} = 4 \cdot c_n.$$

$$\Rightarrow \quad c_n = 3 \cdot 4^{(n-1)}$$

Analog ist $\ell_1 = 1$. Da wir stets gleichseitige Dreiecke verwenden, haben alle Seitenstücke in S_n jeweils die selbe Länge. Da wir von S_n nach S_{n+1} die Seiten jeweils dritteln, ist

$$\ell_{n+1} = \frac{\ell_n}{3}.$$

$$\Rightarrow \quad \ell_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}$$

(i) Da die Kurve S_n selbst ein Polygonzug ist, stimmt ihre Länge mit der Summe der Längen der einzelnen Seitenstücke überein.

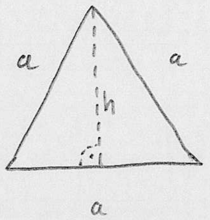
$$\Rightarrow \quad L(S_n) = c_n \cdot \ell_n = 3 \cdot 4^{(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)}.$$

Wegen $\left|\frac{4}{3}\right| > 1$ divergiert nach Analysis I die Folge $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$,

genauer: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)} = \infty$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} L(S_n) = \lim_{n \to \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)} = \infty.$$

(ii) • Zunächst benötigen wir eine Formel für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a:



Es ist $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, d.h. $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.

$$\Rightarrow \quad A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)h\right) = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Also: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

• Wir bezeichnen den Flächeninhalt der von S_n eingeschlossenen Fläche mit F_n. Zunächst ist

$$F_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}.$$

Bei der Konstruktion von S_{n+1} aus S_n wird die Fläche F_n von S_n durch gleichseitige Dreiecke mit Seitenlängen l_{n+1} vergrößert. Insgesamt nehmen wir dabei c_n solcher Dreiecke hinzu, also:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + c_n \cdot \frac{l_{n+1}^2}{4}\sqrt{3} \\ &= F_n + 3 \cdot 4^{(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ &= F_n + 4^{(n-2)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Diese rekursive Formel können wir auflösen:

$$F_{n+1} = F_1 + \sum_{k=1}^{n} 4^{(k-2)} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\sqrt{3}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n} 4^{(k-2)} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right)\sqrt{3}.$$

Wir berechnen nun:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4^{(k-2)} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} = \frac{3}{16} \sum_{k=1}^{\infty} 4^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \frac{3}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k}$$

$$= \frac{3}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k} - \frac{3}{16}$$

geometrische Reihe, $|\frac{4}{9}|<1$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - \frac{3}{16}$$

$$= \frac{3}{20}$$

Insbesondere Konvergiert die Reihe, also ist obige Rechnung gerechtfertigt und wir erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} 4^{(k-2)} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right)\sqrt{3}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{20}\right)\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{3}$$

Zum Vergleich:

$$F_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{5}{20}\sqrt{3}, \quad \lim_{n\to\infty} F_n = \frac{2}{5}\sqrt{3} = \frac{8}{20}\sqrt{3}$$

$\blacksquare$