

Analysis II, WiSe 2012 \ 2013 - Lösung Blatt 8

8.1. • Für die Folge $((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0, 0)$$

Da $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt, ist

$$f((\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f((\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = f((0, 0))$$

Nach Aufgabe B5.1. (ii) Kann also f im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig sein.

• Wir berechnen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f((0, 0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Da der Grenzwert existiert, existiert $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Analog:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(0, 1)) - f((0, 0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Also existiert $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Da alle partiellen Ableitungen in $(0, 0)$ existieren, ist f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar. 

8.2.(i) Offenbar ist f in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ partiell differenzierbar mit:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2y^3 + y^5 - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^3y^2 + 3xy^4 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

• Für den Punkt $(0,0)$ berechnen wir:

$$\circ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f((0,0)+h(1,0)) - f((0,0))}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{h \cdot 0^3}{h^2+0^2}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existiert mit } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\circ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f((0,0)+h(0,1)) - f((0,0))}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{0 \cdot h^3}{0^2+h^2}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ existiert mit } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Also ist f in allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ einmal partiell differenzierbar und es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3 y^2 + xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(*)

- Offenbar sind damit sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ partiell differenzierbar.
 $\Rightarrow f$ ist in allen $(x,y) \neq (0,0)$ zweimal partiell differenzierbar.

Für den Punkt $(0,0)$ berechnen wir:

$$\circ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}((0,0) + h(1,0)) - \frac{\partial f}{\partial x}((0,0))}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{0^5 - h^2 \cdot 0^3}{(h^2 + 0^2)^2}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) \text{ existiert mit } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) = 0$$

$$\circ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}((0,0) + h(0,1)) - \frac{\partial f}{\partial x}((0,0))}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{h^5 - 0 \cdot h^3}{(0^2 + h^2)^2}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{h^5}{h^5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existiert mit } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$$

$$\circ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)+h(1,0)) - \frac{\partial f}{\partial y}((0,0))}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{3h^3 \cdot 0^2 + h \cdot 0^4}{(h^2+0^2)^2}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ existiert mit } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

$$\circ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)+h(0,1)) - \frac{\partial f}{\partial y}((0,0))}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{3 \cdot 0^3 \cdot h^2 + 0 \cdot h^4}{(0^2+h^2)^2}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0,0) \text{ existiert mit } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0,0) = 0.$$

Also: Auch im Punkt $(0,0)$ ist f zweimal partiell differenzierbar.

- Insgesamt: f ist in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar und es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \quad \text{ok.}$$

(ii) • Wegen (*) ist f zunächst in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ stetig partiell differenzierbar.

- Wir schätzen für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ab:

$$\circ \left| \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \cdot \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = |y| \cdot \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \cdot \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|$$

Es ist

$$|x^2 - y^2| \leq |x^2| + |y^2| = x^2 + y^2 = |x^2 + y^2| \Rightarrow \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

Falls $y = 0$ gilt, ist $\left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| = 0 \leq 1$.

Falls $y \neq 0$ gilt, ist

$$\left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{y^2}{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq 0}} \leq \frac{y^2}{y^2} = 1$$

In jedem Fall gilt also: $\left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$.

Damit folgt:

$$\left| \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \stackrel{\substack{\text{siehe} \\ \text{oben}}}{=} |y| \cdot \underbrace{\left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \leq |y|$$

$$\circ \left| \frac{3x^3 y^2 + x y^4}{(x^2+y^2)^2} \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1 \text{ s.o.}} \cdot \underbrace{\left| \frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2} \right|}_{\substack{\geq 0 \text{ und } \leq 3x^2+3y^2}} \leq |x| \left| \frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2} \right| = 3|x|.$$

• Mit diesen Abschätzungen zeigen wir nun, dass $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ auch im Punkt $(0,0)$ stetig sind:

• Wegen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ zeigt die erste Abschätzung oben:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leq |y| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sei nun $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge im $\mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = (0,0).$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ und es folgt:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(a_n, b_n) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a_n, b_n) \right| \leq |b_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(a_n, b_n) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ nach Aufgabe B5.1. (ii) im Punkt $(0,0)$ stetig.

• Analog erhalten wir wegen $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ aus der zweiten Abschätzung

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq 3|x| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ist nun wieder $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = (0,0)$$

dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und es folgt:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a_n, b_n) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a_n, b_n) \right| \leq 3|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig im Punkt $(0,0)$.

Insgesamt ist f also in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar.

(iii) Mit dem Satz von Schwarz folgt, dass mindestens eine der Funktionen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

im Punkt $(0,0)$ unstetig ist, da f sonst zweimal stetig partiell differenzierbar wäre und die Anwendung des Satzes einen Widerspruch gegen (i) liefern würde.

8.3. • Da $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, folgt nach Vorlesung für die Richtungsableitung von f in einem Punkt $x \in G$ in eine Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$:

$$\begin{aligned} D_v f(x) &= \langle v, \operatorname{grad} f(x) \rangle \\ &\leq |\langle v, \operatorname{grad} f(x) \rangle| \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|v\|_2 \cdot \|\operatorname{grad} f(x)\|_2 \\ &= \|\operatorname{grad} f(x)\|_2 \end{aligned} \quad (*)$$

Also: $D_v f(x) \leq \|\operatorname{grad} f(x)\|_2$

Da wir die Richtung des stärksten Anstiegs suchen, d.h. den Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$, so dass $D_v f(x)$ den größtmöglichen Wert annimmt, betrachten wir

$$\begin{aligned} v &\in \mathbb{R} \cdot (\operatorname{grad} f(x)) \cap \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\|_2 = 1\} \\ &= \left\{ \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|_2} \operatorname{grad} f(x), \frac{-1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|_2} \operatorname{grad} f(x) \right\} \end{aligned}$$

denn nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz sind dies die einzigen Vektoren der Länge 1, für die in (*) bei der zweiten Abschätzung sogar Gleichheit gilt.

Bei der ersten Abschätzung gilt (unter diesen Vektoren) nur für $v = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|_2} \operatorname{grad} f(x)$ Gleichheit.

$\Rightarrow v = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|_2} \operatorname{grad} f(x)$ ist die eindeutig bestimmte Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt x .

- Da die Richtung der Kurve γ in einem Punkt $t \in [a, b]$ durch $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ gegeben wird, müssen wir zeigen:

$$\frac{1}{\|\text{grad } f(\gamma(t))\|_2} \text{grad } f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow \text{grad } f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow \langle \text{grad } f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Dazu:

γ ist eine Höhenlinie von f , d.h. $f \circ \gamma$ ist konstant.

Ist $t \in [a, b]$ beliebig, dann folgt also:

$$(f \circ \gamma)'(t) = 0$$

Es ist aber:

$$0 = (f \circ \gamma)'(t) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} Df(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t) \quad (\text{Matrixprodukt})$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial \gamma_j}{\partial x}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t)$$

$$= \langle \text{grad } f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$



8.4. (i) Wir berechnen für $1 \leq k \leq n$:

$$\mathcal{D}_k f(x) = \mathcal{D}_k (\|Ax - b\|_2)^2 = \mathcal{D}_k \left(\sum_{j=1}^m (Ax - b)_j^2 \right)$$

↑
Eintrag j des Vektors $Ax - b$

Müssen aus Notwendungsgründen das x leider in die Ableitung hineinschreiben.

$$= \mathcal{D}_k \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} x_\ell - b_j \right)^2 \right)$$

$$= \sum_{j=1}^m \mathcal{D}_k \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} x_\ell - b_j \right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^m 2 \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} x_\ell - b_j \right) \cdot \mathcal{D}_k \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} x_\ell - b_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^m 2 \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} x_\ell - b_j \right) \cdot \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} \underbrace{\mathcal{D}_k x_\ell}_{= \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell \neq k \\ 1 & \text{falls } \ell = k \end{cases}} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^m 2 \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} x_\ell - b_j \right) \cdot a_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^m 2 a_{jk} \cdot (Ax - b)_j$$

$$= 2 \langle A_k, Ax - b \rangle$$

wobei A_k die Spalte k aus A sei

$$= 2 \langle A \cdot e_k, A \cdot x - b \rangle$$

Also erhalten wir:

$$(\text{grad } f)(x) = (2\langle A \cdot e_1, Ax - b \rangle, \dots, 2\langle A \cdot e_n, Ax - b \rangle) \quad \text{ok.}$$

Bemerkung:

Alternativ zu dieser Rechnung kann man auch die Formel

$$(\mathcal{D}_K \langle f, g \rangle)(x) = \langle \mathcal{D}_K f(x), g(x) \rangle + \langle f(x), \mathcal{D}_K g(x) \rangle$$

nachrechnen und den Gradienten damit direkt berechnen.

(ii) Da das Gleichungssystem $Ay = b$ mindestens eine Lösung besitzt, ist $b \in \text{Bild } A$.

Da $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis ist, gilt:

$$\text{Bild}(A) = \text{Span}(\{Ae_1, \dots, Ae_n\}) \quad (*)$$

Nun berechnen wir für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(\text{grad } f)(x) = 0 \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} 2\langle Ae_k, Ax - b \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

$$\Leftrightarrow \langle Ae_k, Ax - b \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

$$\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \langle w, Ax - b \rangle = 0 \quad \forall w \in \text{Bild}(A)$$

$$\Leftrightarrow Ax - b \perp \text{Bild}(A)$$

$$\Leftrightarrow Ax - b \in (\text{Bild}(A))^\perp \quad \leftarrow \text{(orthogonales Komplement, vgl. Lineare Algebra I)}$$

Wegen $b \in \text{Bild}(A)$ und $Ax \in \text{Bild}(A)$ gilt stets:

$$Ax - b \in \text{Bild}(A)$$

Also:

$$(\operatorname{grad} f)(x) = 0 \stackrel{\text{so.}}{\Leftrightarrow} Ax - b \in (\operatorname{Bild}(A))^\perp$$

$$\Leftrightarrow Ax - b \in \underbrace{(\operatorname{Bild}(A))^\perp \cap \operatorname{Bild}(A)}_{= \{0\}} \quad (\text{Lineare Algebra})$$

$$\Leftrightarrow Ax - b = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax = b$$

$$\Leftrightarrow x \text{ ist Lösung des Gleichungssystems } Ay = b.$$

