

Analysis II, WiSe 2012\2013 - Lösung Blatt 9

9.1. Die Komponentenfunktionen von f sind:

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \sin(y) \cos(z)$$

$$f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \sin(y) \sin(z)$$

$$f_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \cos(y).$$

Wir berechnen alle partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \sin(y) \cos(z), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \cos(y) \cos(z), \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = -x \sin(y) \sin(z)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \sin(y) \sin(z), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \cos(y) \sin(z), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \sin(y) \cos(z)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \cos(y), \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = -x \sin(y), \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$$

Da alle partiellen Ableitungen stetig sind, ist f stetig partiell differenzierbar, also nach Vorlesung total differenzierbar.

Das totale Differenzial (bzgl. der Standardbasis) wird durch die Jacobimatrix gegeben, also:

$$Df\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin(y) \cos(z) & x \cos(y) \cos(z) & -x \sin(y) \sin(z) \\ \sin(y) \sin(z) & x \cos(y) \sin(z) & x \sin(y) \cos(z) \\ \cos(y) & -x \sin(y) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$



9.2. (i). Mit $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$. Da $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^m$ eine Basis des $\mathbb{R}^m$ ist, können wir schreiben:

$$e_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} w_k \quad 1 \leq j \leq m \quad \text{für eindeutige } a_{jk} \in \mathbb{R}.$$

• Wir zeigen nun, dass die Komponenten $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ aus der Darstellung

$$f(y) = \sum_{j=1}^m f_j(y) e_j$$

von f im Punkt $x \in U$ total differenzierbar sind.

Da f in x total differenzierbar ist, gilt auf einer kleinen Umgebung V um $0 \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x+z) = f(x) + Df(x)z + \varepsilon(z) \quad \forall z \in V \quad (*)$$

wobei $\varepsilon: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion ist, welche

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(z)}{\|z\|_2} = 0$$

erfüllt und $Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist.

Wir bezeichnen mit

$$(Df(x))_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

die j -te Komponente von $Df(x)$, d.h. $(Df(x))_j = \text{pr}_j \circ (Df(x))$.

$\Rightarrow (Df(x))_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear und indem wir in $(*)$

jeweils zur j -ten Komponente übergehen, erhalten wir:

$$f_j(x+\xi) = f_j(x) + (Df(x))_j \cdot \xi + \varepsilon_j(\xi) \quad \forall \xi \in V.$$

Wegen $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\xi)}{\|\xi\|_2} = 0$ gilt auch für die j -te Komponente

ε_j von ε :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_j(\xi)}{\|\xi\|_2} = 0$$

$\Rightarrow$ Definition $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist für alle $1 \leq j \leq m$ in $x \in U$ total differenzierbar.

• Damit folgt die Behauptung nun sehr schnell: Es ist

$$\begin{aligned} \forall y \in U \quad f(y) &= \sum_{j=1}^m f_j(y) e_j = \sum_{j=1}^m f_j(y) \cdot \left(\sum_{k=1}^m a_{jk} w_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} f_j(y) \right) \cdot w_k. \end{aligned}$$

Da $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^m$ eine Basis ist erhalten wir durch Koeffizientenvergleich:

$$f_{w_k}(y) = \sum_{j=1}^m a_{jk} f_j(y) \quad \forall y \in U \text{ und } 1 \leq k \leq m.$$

Da die f_j in x total differenzierbar sind und $a_{jk} \in \mathbb{R}$ Konstante Zahlen sind folgt:

f_{w_k} ist in $x \in U$ für $1 \leq k \leq m$ total differenzierbar.

(ii). Da die f_{w_k} nach Teil (i) in $x \in U$ total differenzierbar sind existieren nach Vorlesung die Richtungsableitungen $D_{v_j} f_{w_i}(x)$ der f_{w_i} in die Richtungen v_j im Punkt x und es gilt:

$$D_{v_j} f_{w_i}(x) = (\text{grad } f_{w_i}(x)) \cdot v_j$$

Insbesondere ist also die Matrix aus der Aufgabenstellung wohldefiniert.

• Gemäß der Definition besteht die j -te Spalte der Matrix

$$M(Df(x), v, w)$$

aus den Koordinaten des Vektors $(Df(x)) \cdot v_j \in \mathbb{R}^m$ bzgl. der Basis $w_1, \dots, w_m$ des $\mathbb{R}^m$. Wir müssen also zeigen:

$$(Df(x)) \cdot v_j = \sum_{k=1}^m D_{v_j} f_{w_k}(x) \cdot w_k \quad \forall 1 \leq j \leq n \quad (*)$$

• Dazu schreiben wir

$$w_k = \sum_{j=1}^m b_{kj} e_j \quad 1 \leq k \leq m \quad \text{für eindeutige } b_{kj} \in \mathbb{R}.$$

Bezüglich den Standardbasen des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gilt nach

Vorlesung:

$\swarrow$ Koordinate ℓ bzgl. Standardbasis

$$\left((Df(x)) \cdot v_j \right)_\ell = \sum_{v=1}^n \frac{\partial f_\ell}{\partial x_v}(x) \cdot (v_j)_v = (\text{grad } f_\ell(x)) \cdot v_j$$

$$\Rightarrow (Df(x)) \cdot v_j = \sum_{\ell=1}^m (\text{grad } f_\ell(x)) v_j \cdot e_\ell$$

Nun ist $\forall y \in U$:

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{k=1}^m f_{w_k}(y) w_k = \sum_{k=1}^m f_{w_k}(y) \left(\sum_{j=1}^m b_{kj} e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m b_{kj} f_{w_k}(y) \right) e_j. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $\sum_{k=1}^m b_{kj} f_{w_k}(y) = f_j(y) \quad \forall y \in U.$

Also erhalten wir:

$$(\mathcal{D}f(x)) \cdot v_j = \sum_{\ell=1}^m (\text{grad } f_{e_\ell}(x)) v_j \cdot e_\ell$$

$$= \sum_{\ell=1}^m \left(\text{grad} \left(\sum_{k=1}^m b_{k\ell} f_{w_k} \right) (x) \right) v_j \cdot e_\ell$$

$$= \sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^m b_{k\ell} (\text{grad } f_{w_k}(x)) v_j \cdot e_\ell$$

$$= \sum_{k=1}^m (\text{grad } f_{w_k}(x)) v_j \left(\sum_{\ell=1}^m b_{k\ell} e_\ell \right)$$

$$= \sum_{k=1}^m (\text{grad } f_{w_k}(x)) v_j \cdot w_k$$

$$= \sum_{k=1}^m \mathcal{D}_{v_j} f_{w_k}(x) \cdot w_k$$

$\Rightarrow (*)$ ist nachgewiesen.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } (\dots)(x) \text{ ist totales} \\ \text{Differential in } x, \text{ also linear} \\ \text{in der zu differenzierenden} \\ \text{Funktion!} \end{array} \right.$

(iii) Verwenden wir in (ii) für v und w speziell die Standardbasen des $\mathbb{R}^n$ bzw. des $\mathbb{R}^m$, dann erhalten wir als

Matrixdarstellung genau die Jacobimatrix von f in x . (ii) ist also die Verallgemeinerung der Jacobimatrix auf beliebige Basen:

Die Matrixdarstellung des totalen Differentials einer Funktion besteht aus Richtungsableitungen der Komponentenfunktion bzgl. der einen Basis in die durch die andere Basis gegebenen Richtungen.

Insbesondere: Im Falle der totalen Differenzierbarkeit einer Funktion f in x enthält das totale Differential

$$Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

als lineare Ableitung bereits alle möglichen Richtungsableitungen von f in x .



9.3 (i). Für die Jacobimatrix von f in einem Punkt $x \in U$ gilt:

$$0 = Df(x) \stackrel{\text{Vorlesung}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Also: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0 \quad \forall x \in U$ und alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.

$\Rightarrow$ Alle partiellen Ableitungen sind stetig, d.h. f ist sogar stetig partiell differenzierbar (für Mittelwertsatz erforderlich).

• Sei nun $x \in U$ fest. Da $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, ist

$$U_\varepsilon(x) \subset U \quad \text{für ein } \varepsilon > 0 \text{ geeignet.}$$

Wir zeigen, dass f auf $U_\varepsilon(x)$ konstant ist. Sei dazu $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig. Zu zeigen: $f(y) = f(x)$.

Dazu sei $z = y - x$. Für t mit $0 \leq t \leq 1$ ist

$$\|x - (x + tz)\|_2 = \|t(y - x)\|_2 = \underbrace{|t|}_{\leq 1} \underbrace{\|y - x\|_2}_{< \varepsilon} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x + tz \in U_\varepsilon(x) \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt:

$$f(y) - f(x) = f(x + (y - x)) - f(x) = f(x + z) - f(x)$$

$$\stackrel{\text{MWS.}}{=} \left(\underbrace{\int_0^1 Df(x + tz) dt}_{=0} \right) \cdot z = \left(\int_0^1 0 dt \right) \cdot z = 0.$$

Also gilt: $f(y) = f(x)$.

ok.

(ii) Nach Teil (i) ist f auf U zunächst lokal konstant. Wir fixieren einen Punkt $x \in U$. Es genügt zu zeigen:

$$f(y) = f(x) \quad \forall y \in U \setminus \{x\}$$

Sei also $y \in U \setminus \{x\}$ beliebig. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es eine stetige Kurve

$$\gamma: [a, b] \rightarrow U$$

mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Wir definieren

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g := f \circ \gamma.$$

und müssen zeigen, dass $g(a) = g(b)$ gilt.

(denn: $g(a) = g(b) \Rightarrow f(\gamma(a)) = f(\gamma(b)) \Rightarrow f(x) = f(y)$).

Dazu sei

$$M := g^{-1}(\{g(a)\}) \subset [a, b]. \quad \text{Zu zeigen: } b \in M.$$

Da g stetig ist und $\{g(a)\} \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen ist (ÜA B3.3.(i)), ist M nach ÜA B6.2.(i) abgeschlossen.

Sei nun

$$c := \sup M \in [a, b] \quad (\text{da } M \subset [a, b])$$

Da M abgeschlossen ist, gilt:

$$c \in M.$$

(Denn nach Konstruktion gibt es eine Folge in M , die gegen c konvergiert. Da M abgeschlossen ist, muss der Grenzwert c bereits in M liegen - vgl. hierzu auch die Lösung von ÜA B6.3.)

Behauptung: Es ist $c = b$.

(Damit sind wir dann fertig, da wegen $c \in M$ dann $b \in M$ gelten muss.)

↗ $c \neq b$ (d.h. $c < b$).

Da f lokal konstant ist, gibt es eine Umgebung V um $\gamma(c) \in \mathbb{R}^n$ so dass f auf V konstant ist.

Da V Umgebung um $\gamma(c)$ ist, gibt es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ mit

$\gamma(c) \in W \subset V$ d.h. f ist auch auf W konstant.

Da γ stetig ist, ist $\gamma^{-1}(W) \subset [a, b]$ offen

Da $c \in \gamma^{-1}(W)$ gilt und $[a, b]$ mit der Relativtopologie von $\mathbb{R}$ ausgestattet ist, ist für ein geeignetes $\varepsilon > 0$:

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b] \subset \gamma^{-1}(W).$$

$$\Rightarrow \exists \eta \in \gamma^{-1}(W) \text{ mit } c < \eta < b.$$

Da $\gamma(c) \in W$, $\gamma(\eta) \in W$ gilt und f auf W konstant ist, ist $f(\gamma(c)) = f(\gamma(\eta))$, d.h. $g(c) = g(\eta)$

Da $c \in M$, folgt: $\eta \in M$ $\nwarrow$ $c = \sup M$, denn $\eta > c$ nach Konstruktion.

$\Rightarrow$ Es muss doch $c = b$ gelten.



9.4. • Es sei $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto t \cdot x$.

$\Rightarrow \psi$ ist (als Polynom) stetig partiell differenzierbar

$\xRightarrow{\text{Vorlesung}} \psi$ ist (in allen Punkten des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) total differenzierbar.

Für die Komponentenfunktionen ψ_k von ψ gilt:

$$\psi_k((t, x_1, \dots, x_n)^t) = t \cdot x_k \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

Also können wir berechnen:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t}((t, x_1, \dots, x_n)^t) = x_k, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}((t, x_1, \dots, x_n)^t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \neq k \\ t & \text{falls } j = k \end{cases}$$

Die Jacobimatrix von ψ im Punkt $(t, x_1, \dots, x_n)^t$ ist also gegeben durch

$$\mathbb{D}\psi((t, x_1, \dots, x_n)^t) = \begin{pmatrix} x_1 & t & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \dots & 0 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}.$$

• Nach Voraussetzung ist f in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar und nach Vorlesung folgt für die Jacobimatrix:

$$\mathbb{D}f(x) = \text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Wir können also die Kettenregel auf $f \circ \psi$ anwenden und erhalten:

$$\left(\frac{\partial f \circ \psi}{\partial t}(t, x)^t, \frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_1}(t, x)^t, \dots, \frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_n}(t, x)^t \right) = \mathbb{D}(f \circ \psi)(t, x)^t$$

Kettenregel $\rightarrow$
$$= \mathbb{D}f(\psi(t, x)^t) \cdot \mathbb{D}\psi(t, x)^t$$

Insbesondere folgt also für alle $(t, x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f \circ \psi}{\partial t} (t, x_1, \dots, x_n)^t &= \sum_{K=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_K} (\psi(t, x_1, \dots, x_n)^t) \cdot x_K \\ &= \sum_{K=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_K} (tx_1, \dots, tx_n)^t \cdot x_K \end{aligned}$$

Andererseits ist $f \circ \psi (t, x_1, \dots, x_n)^t = f(tx_1, \dots, tx_n)^t = t^d \cdot f(x_1, \dots, x_n)^t$ falls $t > 0$ gilt (Voraussetzung!). Für solche t berechnen wir also

$$\frac{\partial f \circ \psi}{\partial t} (t, x_1, \dots, x_n)^t = d \cdot t^{d-1} \cdot f(x_1, \dots, x_n)^t.$$

Also: Für alle $(t, x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $t > 0$ gilt:

$$d \cdot t^{d-1} f(x_1, \dots, x_n)^t = \sum_{K=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_K} (tx_1, \dots, tx_n)^t \cdot x_K.$$

Speziell für $t=1$ erhalten wir:

$$d \cdot f(x_1, \dots, x_n)^t = \sum_{K=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_K} (x_1, \dots, x_n)^t \cdot x_K$$

d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$d \cdot f(x) = \text{grad } f(x) \cdot x$$

und damit:

$$f(x) = \frac{1}{d} \text{grad } f(x) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

