Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2012/2013

B

Alternativklausur zur Analysis II

Montag, den 08.04.2013, 09:15–12:00 Uhr,
Hörsaal A, Hörsaalgebäude Chemie (Lahnberge)

Name: ....

Vorname: Musterlösung

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 56 Punkte erwartet, d.h. 56 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
max. Punkte	8	8	8	8	8	8	8	8	64
erreichte Punkte									

Name: ....

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Es gibt eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ welche weder offen noch abgeschlossen ist.

   wahr ☒ *falsch* ☐

2. Induzieren zwei Metriken d_1 und d_2 auf einer Menge M dieselbe Topologie, dann ist jede Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ stetig bezüglich d_1 genau dann, wenn sie stetig bezüglich d_2 ist.

   wahr ☒ *falsch* ☐

3. Eine Teilmenge $K \subset X$ eines Hausdorffraums $(X, \mathfrak{X})$ ist genau dann kompakt, wenn es eine Überdeckung von K durch endlich viele offene Teilmengen von X gibt.

   wahr ☐ *falsch* ☒

4. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, so ist f in x auch stetig.

   wahr ☐ *falsch* ☒

5. Für jede rektifizierbare Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist ihre Länge L gegeben durch $L = \int_a^b \|f'(t)\|_2 \, dt$.

   wahr ☐ *falsch* ☒

6. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar.

   wahr ☒ *falsch* ☐

7. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und $\operatorname{Hess} f(x)$ positiv semidefinit. Dann besitzt f in x ein lokales Minimum.

   wahr ☐ *falsch* ☒

8. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann ist jede Lösung der linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ stets auf dem gesamten Intervall I definiert.

   wahr ☒ *falsch* ☐

Name: ....

Aufgabe 2 (3+2+3=8 Punkte)

Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|\,.$$

Zeigen Sie:

(i) $(\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.

(ii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Metrik, so ist $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$.

(iii) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

Hinweis: Betrachten Sie eine Nullfolge bezüglich der euklidischen Metrik.

(i) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig.

- $d(x,y) = 0 \iff |\exp(x) - \exp(y)| = 0$

$\overset{|\cdot| \text{ Norm}}{\iff} \exp(x) - \exp(y) = 0 \iff \exp(x) = \exp(y)$

$\overset{\exp \text{ injektiv}}{\iff} x = y$ ok.

- $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)| = |\exp(y) - \exp(x)| = d(y,x)$ ok.

- $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)| = |\exp(x) \underbrace{- \exp(z) + \exp(z)}_{=0} - \exp(y)|$

$\overset{|\cdot| \text{ Norm}}{\leq} |\exp(x) - \exp(z)| + |\exp(z) - \exp(y)|$

$= d(x,z) + d(z,y)$ ok.

$\Rightarrow (\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der euklidischen Metrik mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$.

$\Rightarrow d(\ln(a_n), \ln(a_m)) = |\exp(\ln(a_n)) - \exp(\ln(a_m))|$

$= |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \forall n,m > N$

$\Rightarrow (\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$.

(iii) Betrachten die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, welche in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik gegen 0 konvergiert.

$\overset{\text{insb.}}{\Longrightarrow} (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik.

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} (\ln(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$.

$\nearrow$ $(\ln(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $(\mathbb{R}, d)$ gegen $a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(\ln(\frac{1}{n}), a) < \varepsilon \quad \forall n > N$.

Wegen $d(\ln(\frac{1}{n}), a) = |\exp(\ln(\frac{1}{n})) - \exp(a)|$

$= |\frac{1}{n} - \exp(a)|$

gilt also: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{n} - \exp(a)| < \varepsilon \quad \forall n > N$.

Es gilt also $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \exp(a)$ in $\mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes in metrischen Räumen folgt also:

$$\exp(a) = 0 \qquad \lightning_{\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Also ist $(\ln(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$ welche nicht konvergiert. $(\mathbb{R}, d)$ ist also nicht vollständig. $\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es sei V ein reeller Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie, dass für jeden festen Vektor $w \in V$ die Abbildung

$$f_w : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \langle x, w\rangle$$

stetig bezüglich der vom Skalarprodukt auf V induzierten Norm ist.

- Für $w = 0$ ist $f_w(x) = <x, 0> = 0 \quad \forall x \in V$, also ist f_w als Konstante Funktion stetig.
- Sei also $w \neq 0$. Für $x, y \in V$ berechnen wir:

$$|f_w(x) - f_w(y)| = |<x,w> - <y,w>| = |<x-y, w>| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x-y\| \cdot \|w\| \qquad (*)$$

- Sei nun $x \in V$ fixiert und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{\|w\|} > 0$. Dann gilt $\forall\, y \in V$ mit $\|x-y\| < \delta$:

$$|f_w(x) - f_w(y)| \overset{(*)}{\leq} \|x-y\| \cdot \|w\| < \delta \cdot \|w\| = \varepsilon.$$

$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow}$ f_w ist in $x \in V$ stetig.

- Da $x \in V$ beliebig war, ist f_w in allen Punkten aus V stetig und damit nach Vorlesung insgesamt stetig als Abbildung $V \to \mathbb{R}$. ∎

Name: ....

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist und berechnen Sie das totale Differential.

- Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann berechnen wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ stetig}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ stetig.}$$

Also ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell und damit total differenzierbar mit

$$Df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2} \cdot (2x, 2y) .$$

- Betrachten nun $(x,y) = (0,0)$. Wir berechnen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)\right) \overset{(*)}{=} 0$$

(Genaues Argument für $(*)$ – <u>nicht verlangt</u>:

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n^2} = \infty$. Nach Analysis I ist $\lim_{x \to \infty} x \exp(-x) = 0$,

also $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{a_n^2} \exp\left(-\frac{1}{a_n^2}\right)\right) = 0$.)

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existiert mit } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Analog: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ existiert mit } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Sei nun $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$.

Dann:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{(x_n^2+y_n^2)^2}\exp\left(-\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{2x_n}_{\to 0}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{(x_n^2+y_n^2)^2}\exp\left(-\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{2y_n}_{\to 0}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind auch in $(0,0)$ stetig.

$\Rightarrow$ f ist auch in $(0,0)$ stetig partiell und damit total differenzierbar, mit:

$$Df(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\varphi : [1,16] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t-1} \end{pmatrix}.$$

- Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist φ stetig differenzierbar. Also ist φ nach Vorlesung rektifizierbar und für die Länge L gilt:

$$L = \int_1^{16} \|\varphi'(t)\| dt.$$

- Wir berechnen:

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{t-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(t-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{t-1} + \frac{1}{3}(t-1)\frac{\sqrt{t-1}}{(t-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{t-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1^2 + \sqrt{t-1}^{\,2}} = \sqrt{1+t-1} = \sqrt{t}.$$

$$\Rightarrow L = \int_1^{16} \|\varphi'(t)\| dt = \int_1^{16} \sqrt{t}\, dt = \left(\frac{2}{3} t\sqrt{t}\right)\Big|_1^{16}$$

$$= \frac{2}{3}\left(16\sqrt{16} - 1\right) = \frac{2}{3}(64-1) = \frac{126}{3} = 42.$$

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Es sei

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y>0\}.$$

Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^2$ offen ist und bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\ln(x+y) - y.$$

- Es ist $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$ stetig und $M = h^{-1}((0,\infty))$. Da $(0,\infty) \subset \mathbb{R}$ offen ist, ist $M \subset \mathbb{R}^2$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen.
- Wir berechnen die kritischen Punkte von f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x+y} - 1$$

$$\Rightarrow (\operatorname{grad} f)(x,y) = \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y} - 1\right)$$

d.h. $(\operatorname{grad} f)(x,y) = 0 \iff \left[\begin{array}{lll} \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} = 0 & & (\mathrm{I}) \\ \frac{x}{x+y} - 1 = 0 & & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$

Es ist $(\mathrm{II}) \iff \frac{x}{x+y} = 1 \iff x = x+y \iff y = 0$

Unter dieser Bedingung liefert (I):

$$\ln(x) + \frac{x}{x} = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = \exp(-1)$$
$$\iff x = \frac{1}{e}.$$

Also: $(\operatorname{grad} f)(x,y) = 0 \iff (x,y) = \left(\frac{1}{e}, 0\right)$, d.h.

$\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ ist der einzige Kritische Punkt von f.

- Untersuchen diesen Punkt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y} - x\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{2}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{-x}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2}.$$

$$\Rightarrow (\operatorname{Hess} f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} & \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

Insbesondere folgt:

$$(\operatorname{Hess} f)\left(\frac{1}{e}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2e - e & e - e \\ e - e & -e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left((\operatorname{Hess} f)\left(\frac{1}{e}, 0\right)\right) = -e^2 < 0$$

$$\Rightarrow (\operatorname{Hess} f)\left(\frac{1}{e}, 0\right) \text{ ist indefinit}$$

$\Rightarrow$ f besitzt in $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ Kein lokales Extremum.

Insgesamt folgt: f besitzt überhaupt Kein lokales Extremum.

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + uy + \exp(v) = 0$$
$$2x + u^2 - uv = 5$$

auf einer Umgebung um den Punkt $p = (x, y, u, v) = (2, 5, -1, 0)$ auf eindeutige Weise nach (u, v) aufgelöst, d.h. in der Form

$$(u, v) = \varphi(x, y)$$

mit $\varphi(2, 5) = (-1, 0)$ geschrieben werden kann und berechnen Sie das totale Differential von φ im Punkt $(2, 5)$.

- Wir definieren $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$(x,y,u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + uy + \exp(v) \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{pmatrix}^t$$

$\Rightarrow$ F ist stetig partiell differenzierbar und die Lösungen des vorgelegten Gleichungssystems sind genau die Nullstellen von F. Es ist

$$F(p) = \begin{pmatrix} 4-5+1 \\ 4+1-5 \end{pmatrix}^t = (0,0)$$ d.h. p ist eine Lösung des Gleichungssystems. Außerdem berechnen wir:

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} y & \exp(v) \\ 2u-v & -u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ d.h. $\det\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)\right) = 7 \neq 0$

also ist $\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)$ invertierbar und der Satz über implizite Funktionen anwendbar.

$\overset{\text{SIF}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $U \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von $(2,5)$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von $(-1,0)$ sowie eine stetig partiell differenzierbare Abbildung

$$\varphi : U \to V$$

so dass in $U \times V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ gilt:

$$F(x,y,u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x,y) = (u,v)$$

Also kann das Gleichungssystem auf der Umgebung $U \times V$ um p auf eindeutige Weise nach (u,v) aufgelöst werden.

- Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt:

$$D\varphi(2,5) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(p)\right)$$

$$= -\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2x & u \\ 2 & 0 \end{pmatrix}(p) \quad = -\begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 \\ 2/7 & 5/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ 18/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 \\ -18/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = x\exp(-x).$$

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung mit Konstanten Koeffizienten.

- Wir bestimmen ein Lösungs-Fundamentalsystem der homogenen Gleichung und müssen dazu das Polynom

$$P(T) = T^2 - 2T + 1$$

betrachten. Wegen $P(T) = (T-1)^2$ besitzt P nur $1 \in \mathbb{R}$ als Nullstelle mit Vielfachheit 2.

$\overset{VL}{\Longrightarrow}$ Durch $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = \exp(x), \quad \varphi_2(x) = x\exp(x)$$

ist ein Lösungsfundamentalsystem von $y'' - 2y' + y = 0$ gegeben.

- Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Wegen $P(-1) = 4 \neq 0$ liegt keine Resonanz vor. Nach Vorlesung besitzt die DGL eine Lösung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$\psi(x) = g(x)\exp(-x)$$

wobei g ein Polynom vom Grad 1 ist.

Wir schreiben $\psi(x) = (ax+b)\exp(-x)$ und berechnen:

$$\psi'(x) = a\exp(-x) - (ax+b)\exp(-x) = (-ax+a-b)\exp(-x)$$

$$\psi''(x) = -a\exp(-x) - (-ax+a-b)\exp(-x) = (ax+b-2a)\exp(-x)$$

Damit:

$$\psi''(x) - 2\psi'(x) + \psi(x) = \left(ax+b-2a-2(-ax+a-b)+ax+b\right)\exp(-x)$$

$$= (4ax+4b-4a)\exp(-x)$$

$$= x\exp(-x)$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a = 1 \\ 4b-4a = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)\exp(-x)$.

$\overset{VL}{\Longrightarrow}$ Die Menge L aller Lösungen der vorgelegten DGL ist

$$L = \left\{ \psi + \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\blacksquare$