

Name:

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Es gibt eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ welche weder offen noch abgeschlossen ist.

wahr ☐ falsch ☐

2. Induzieren zwei Metriken d_1 und d_2 auf einer Menge M dieselbe Topologie, dann ist jede Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bezüglich d_1 genau dann, wenn sie stetig bezüglich d_2 ist.

wahr ☐ falsch ☐

3. Eine Teilmenge $K \subset X$ eines Hausdorffraums $(X, \mathfrak{X})$ ist genau dann kompakt, wenn es eine Überdeckung von K durch endlich viele offene Teilmengen von X gibt.

wahr ☐ falsch ☐

4. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, so ist f in x auch stetig.

wahr ☐ falsch ☐

5. Für jede rektifizierbare Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ihre Länge L gegeben durch $L = \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt$.

wahr ☐ falsch ☐

6. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar.

wahr ☐ falsch ☐

7. Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\text{grad } f(x) = 0$ und $\text{Hess } f(x)$ positiv semidefinit. Dann besitzt f in x ein lokales Minimum.

wahr ☐ falsch ☐

8. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann ist jede Lösung der linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ stets auf dem gesamten Intervall I definiert.

wahr ☐ falsch ☐

Name:

Aufgabe 2 (3+2+3=8 Punkte)

Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|.$$

Zeigen Sie:

- (i) $(\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.
- (ii) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Metrik, so ist $(\ln(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$.
- (iii) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

Hinweis: Betrachten Sie eine Nullfolge bezüglich der euklidischen Metrik.

Name:

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es sei V ein reeller Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V .
Zeigen Sie, dass für jeden festen Vektor $w \in V$ die Abbildung

$$f_w : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \langle x, w \rangle$$

stetig bezüglich der vom Skalarprodukt auf V induzierten Norm ist.

Name:

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist und berechnen Sie das totale Differential.

Name:

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\varphi : [1, 16] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t-1} \end{pmatrix}.$$

Name:

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Es sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^2$ offen ist und bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x \ln(x + y) - y.$$

Name:

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + uy + \exp(v) = 0$$

$$2x + u^2 - uv = 5$$

auf einer Umgebung um den Punkt $p = (x, y, u, v) = (2, 5, -1, 0)$ auf eindeutige Weise nach (u, v) aufgelöst, d.h. in der Form

$$(u, v) = \varphi(x, y)$$

mit $\varphi(2, 5) = (-1, 0)$ geschrieben werden kann und berechnen Sie das totale Differential von φ im Punkt $(2, 5)$.

Name:

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = x \exp(-x).$$

Name:

Zusatzblatt 1

Name:

Zusatzblatt 2