Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2012/2013

L

Alternativklausur zur Analysis II

Montag, den 08.04.2013, 09:15–12:00 Uhr,
Hörsaal A, Hörsaalgebäude Chemie (Lahnberge)

Name: ....

Vorname: ...Musterlösung.............

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 56 Punkte erwartet, d.h. 56 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
max. Punkte	8	8	8	8	8	8	8	8	64
erreichte Punkte									

Name: ....

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Es gibt eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ welche weder offen noch abgeschlossen ist.

   wahr ☒ *falsch* ☐

2. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Erhält man für den Mittelwert M von $|f|$ auf $[a,b]$ den Wert $M = 0$, dann folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

   wahr ☒ *falsch* ☐

3. Eine Teilmenge $K \subset X$ eines Hausdorffraums $(X, \mathfrak{X})$ ist genau dann kompakt, wenn es eine Überdeckung von K durch endlich viele offene Teilmengen von X gibt.

   wahr ☐ *falsch* ☒

4. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, so ist f in x auch stetig.

   wahr ☐ *falsch* ☒

5. Für jede rektifizierbare Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist ihre Länge L gegeben durch $L = \int_a^b \|f'(t)\|_2 \, dt$.

   wahr ☐ *falsch* ☒

6. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar.

   wahr ☒ *falsch* ☐

7. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und $\operatorname{Hess} f(x)$ positiv semidefinit. Dann besitzt f in x ein lokales Minimum.

   wahr ☐ *falsch* ☒

8. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann ist jede Lösung der linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ stets auf dem gesamten Intervall I definiert.

   wahr ☒ *falsch* ☐

Name: ....

Aufgabe 2 (3+2+3=8 Punkte)

Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)| \, .$$

Zeigen Sie:

(i) $(\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.

(ii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Metrik, so ist $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$.

(iii) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

Hinweis: Betrachten Sie eine Nullfolge bezüglich der euklidischen Metrik.

(i) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig.

- $d(x,y) = 0 \iff |\exp(x) - \exp(y)| = 0$

$\overset{|\cdot| \text{ Norm}}{\iff} \exp(x) - \exp(y) = 0 \iff \exp(x) = \exp(y)$

$\overset{\exp \text{ injektiv}}{\iff} x = y$ ok.

- $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)| = |\exp(y) - \exp(x)| = d(y,x)$ ok.

- $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)| = |\exp(x) \underbrace{- \exp(z) + \exp(z)}_{=0} - \exp(y)|$

$\overset{|\cdot| \text{ Norm}}{\leq} |\exp(x) - \exp(z)| + |\exp(z) - \exp(y)|$

$= d(x,z) + d(z,y)$ ok.

$\Rightarrow (\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der euklidischen Metrik mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$.

$\Rightarrow d(\ln(a_n), \ln(a_m)) = |\exp(\ln(a_n)) - \exp(\ln(a_m))|$

$= |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n,m > N$

$\Rightarrow (\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$.

(iii) Betrachten die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, welche in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik gegen 0 konvergiert.

$\overset{\text{insb.}}{\Rightarrow} (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik.

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} (\ln(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$.

$\nearrow (\ln(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $(\mathbb{R}, d)$ gegen $a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(\ln(\frac{1}{n}), a) < \varepsilon \quad \forall n > N$.

Wegen $d(\ln(\frac{1}{n}), a) = |\exp(\ln(\frac{1}{n})) - \exp(a)|$

$= |\frac{1}{n} - \exp(a)|$

gilt also: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{n} - \exp(a)| < \varepsilon \quad \forall n > N$.

Es gilt also $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \exp(a)$ in $\mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes in metrischen Räumen folgt also:

$$\exp(a) = 0 \quad \lightning_{\exp(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}}.$$

Also ist $(\ln(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$ welche nicht konvergiert. $(\mathbb{R}, d)$ ist also nicht vollständig. $\blacksquare$

Name:..

Aufgabe 3 (2+3+3=8 Punkte)

Es beschreibe $A(h)$ die Oberfläche eines Gartenteiches in Abhängigkeit von der Höhe h des Wasserspiegels. Das in dem Teich befindliche Wasservolumen ist ebenfalls eine Funktion der Höhe des Wasserspiegels und sei mit $V(h)$ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass es sich bei der Funktion $V(h)$ um eine Stammfunktion der Funktion $A(h)$ handelt. Betrachten Sie hierzu die Volumenänderung ΔV für hinreichend kleine Änderungen Δh. Nennen Sie die Eigenschaft der Funktion $A(h)$, die Sie hierbei voraussetzen müssen, und nehmen Sie dazu Stellung, inwiefern dies im gegebenen Sachkontext gerechtfertigt ist.

(ii) Die Oberfläche des Teiches werde durch folgende Funktion beschrieben:

$$A(h) = \begin{cases} h \cdot \ln\left(h^2\right) + 5 & h > 0 \\ 5 & h = 0 \end{cases}$$

Die Höhe h ist hierbei in m und die Oberfläche $A(h)$ in m^2 angegeben. Bestimmen Sie die Funktion $V(h)$ für den Gartenteich.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $A(h)$ stetig in $h = 0$ ist.

(iii) Die Höhe des Wasserspiegels variiert für gewöhnlich nur wenig um $h = 1$. Approximieren Sie die Funktion $A(h)$ an der Stelle $h = 1$ *linear* – die Approximation sei mit L bezeichnet –, und berechnen Sie mit Hilfe von L, um wieviel Liter das Wasservolumen im Teich bei Änderung des Wasserspiegels von $h = 1$ auf $h = 1{,}10$ (näherungsweise) zunimmt.

<u>Lösung</u>:

(i) Für *stetiges* A gilt bei hinreichend kleinen Werten von Δh

$$A(h) \approx A(h + \Delta h).$$

Hieraus ergibt sich

$$\Delta V = V(h+\Delta h) - V(h) \approx A(h) \cdot \Delta h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V(h+\Delta h) - V(h)}{\Delta h} \approx A(h).$$

Somit folgt für den Grenzübergang $\Delta h \to 0$:

$$V'(h) = A(h).$$

Bei $V(h)$ handelt es sich also um eine Stammfunktion von $A(h)$. Die Annahme der Stetigkeit von $A(h)$ ist im gegebenen Sachkontext gerechtfertigt, da sich die Oberfläche eines „realen" Teiches nicht „sprunghaft" ändern kann.

(ii) Mit partieller Integration und der für $h > 0$ geltenden Beziehung: $\ln\left(x^2\right) = 2 \ln x$ erhält man

$$\int h\cdot\ln\left(h^2\right)+5\,dh = 2\cdot\int h\cdot\ln h\,dh+5h \quad | \; u'=h,\; v=\ln h$$
$$= 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}h^2\cdot\ln h - \int\tfrac{1}{2}h^2\cdot\tfrac{1}{h}\,dh\right)+5h$$
$$= 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}h^2\cdot\ln h - \tfrac{1}{2}\cdot\int h\,dh\right)+5h$$
$$= h^2\cdot\ln h-\tfrac{1}{2}h^2+5h+C$$

Man beachte:

Laut Hinweis gilt $\lim\limits_{h\searrow 0} h\cdot\ln\left(h^2\right)=\lim\limits_{h\searrow 0}2h\cdot\ln h=0$ und somit auch $\lim\limits_{h\searrow 0}h^2\cdot\ln h=0$. Es folgt:

$$\lim_{h\searrow 0} h^2\cdot\ln h-\tfrac{1}{2}h^2+5h=0 \qquad (*)$$

Aus der Nebenbedingung $V(0)=0$ – der Teich ist *leer*, wenn der Wasserspiegel gleich null ist – folgt somit unter Beachtung von $(*)$ unmittelbar $C=0$. Somit erhält man insgesamt

$$V(h) = h^2\cdot\ln h-\tfrac{1}{2}h^2+5h$$

(iii) Die lineare Approximation ist gleich dem Taylorpolynom 1.Ordnung. Es gilt daher:

$$L(h) = A(1)+A'(1)\cdot(h-1)$$

Mit $h>0$ folgt

$$A'(h) = \left(2h\cdot\ln h+5\right)' = 2\ln h+2$$

und somit

$$L(h) = 5+2\cdot(h-1) = 2h+3$$

Als Näherung für die Volumenfunktion erhält man daher unter Beachtung der Bedingung $V(1)=4{,}5$:

$$V(h) = h^2+3h+0{,}5$$

Mit

$$V(1{,}1) = 1{,}21+3{,}3+0{,}5 = 5{,}01$$

erhält man

$$\Delta V = V(1{,}1)-V(1) = 0{,}51$$

Das Volumen nimmt also in etwa um $0{,}51\ \text{m}^3$ = 510 Liter zu, wenn sich der Wasserspiegel von 1 m auf 1,1 m erhöht.

Name: ....

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist und berechnen Sie das totale Differential.

- Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann berechnen wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ stetig}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ stetig.}$$

Also ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell und damit total differenzierbar mit

$$Df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2} \cdot (2x, 2y).$$

- Betrachten nun $(x,y) = (0,0)$. Wir berechnen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)\right) \overset{(*)}{=} 0$$

(Genaues Argument für $(*)$ – <u>nicht verlangt</u>:

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n^2} = \infty$. Nach Analysis I ist $\lim_{x \to \infty} x \exp(-x) = 0$,

also $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{a_n^2} \exp\left(-\frac{1}{a_n^2}\right)\right) = 0$.)

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existiert mit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Analog: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existiert mit $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Sei nun $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$.

Dann:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{\frac{1}{(x_n^2 + y_n^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{x_n^2 + y_n^2}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{2x_n}_{\to 0} \right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{\frac{1}{(x_n^2 + y_n^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{x_n^2 + y_n^2}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{2y_n}_{\to 0} \right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind auch in $(0,0)$ stetig.

$\Rightarrow f$ ist auch in $(0,0)$ stetig partiell und damit total differenzierbar, mit:

$$Df(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0).$$

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\varphi : [1,16] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t-1} \end{pmatrix}.$$

• Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist φ stetig differenzierbar. Also ist φ nach Vorlesung rektifizierbar und für die Länge L gilt:

$$L = \int_1^{16} \|\varphi'(t)\| dt.$$

• Wir berechnen:

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{t-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(t-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{t-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{t-1} + \frac{1}{3}(t-1)\frac{\sqrt{t-1}}{(t-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{t-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1^2 + \sqrt{t-1}^{\,2}} = \sqrt{1+t-1} = \sqrt{t}.$$

$$\Rightarrow L = \int_1^{16} \|\varphi'(t)\| dt = \int_1^{16} \sqrt{t}\, dt = \left(\frac{2}{3} t\sqrt{t}\right)\Big|_1^{16}$$

$$= \frac{2}{3}\left(16\sqrt{16} - 1\right) = \frac{2}{3}(64-1) = \frac{126}{3} = 42.$$

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Es sei

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y > 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^2$ offen ist und bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\ln(x+y) - y.$$

- Es ist $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$ stetig und $M = h^{-1}((0,\infty))$. Da $(0,\infty) \subset \mathbb{R}$ offen ist, ist $M \subset \mathbb{R}^2$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen.

- Wir berechnen die Kritischen Punkte von f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x+y} - 1$$

$$\Rightarrow (\operatorname{grad} f)(x,y) = \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}, \; \frac{x}{x+y} - 1\right)$$

d.h. $(\operatorname{grad} f)(x,y) = 0 \iff \left[\begin{array}{lll} \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} = 0 & & (\mathrm{I}) \\ \frac{x}{x+y} - 1 = 0 & & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$

Es ist $(\mathrm{II}) \iff \frac{x}{x+y} = 1 \iff x = x+y \iff y = 0$

Unter dieser Bedingung liefert (I):

$$\ln(x) + \frac{x}{x} = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = \exp(-1)$$
$$\iff x = \frac{1}{e}.$$

Also: $(\operatorname{grad} f)(x,y) = 0 \iff (x,y) = \left(\frac{1}{e}, 0\right)$, d.h.

$\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ ist der einzige Kritische Punkt von f.

- Untersuchen diesen Punkt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y} - x\,\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{2}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{-x}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2}.$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Hess}\, f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} & \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

Insbesondere folgt:

$$(\mathrm{Hess}\, f)\left(\frac{1}{e}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2e-e & e-e \\ e-e & -e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left((\mathrm{Hess}\, f)\left(\frac{1}{e}, 0\right)\right) = -e^2 < 0$$

$\Rightarrow (\mathrm{Hess}\, f)\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ ist indefinit

$\Rightarrow f$ besitzt in $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ Kein lokales Extremum.

Insgesamt folgt: f besitzt überhaupt Kein lokales Extremum.

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + uy + \exp(v) = 0$$
$$2x + u^2 - uv = 5$$

auf einer Umgebung um den Punkt $p = (x, y, u, v) = (2, 5, -1, 0)$ auf eindeutige Weise nach (u, v) aufgelöst, d.h. in der Form

$$(u, v) = \varphi(x, y)$$

mit $\varphi(2, 5) = (-1, 0)$ geschrieben werden kann und berechnen Sie das totale Differential von φ im Punkt $(2, 5)$.

- Wir definieren $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$(x, y, u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 + uy + \exp(v) \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{pmatrix}^t$$

$\Rightarrow$ F ist stetig partiell differenzierbar und die Lösungen des vorgelegten Gleichungssystems sind genau die Nullstellen von F. Es ist

$$F(p) = \begin{pmatrix} 4 - 5 + 1 \\ 4 + 1 - 5 \end{pmatrix}^t = (0, 0)$$

d.h. p ist eine Lösung des Gleichungssystems. Außerdem berechnen wir:

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} y & \exp(v) \\ 2u - v & -u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } \det\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)\right) = 7 \neq 0$$

also ist $\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)$ invertierbar und der Satz über implizite Funktionen anwendbar.

$\overset{\text{SIF}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $U \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von $(2,5)$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von $(-1,0)$ sowie eine stetig partiell differenzierbare Abbildung

$$\varphi : U \to V$$

so dass in $U \times V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ gilt:

$$F(x,y,u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x,y) = (u,v)$$

Also kann das Gleichungssystem auf der Umgebung $U \times V$ um p auf eindeutige Weise nach (u,v) aufgelöst werden.

- Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt:

$$D\varphi(2,5) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(p)\right)$$

$$= -\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2x & u \\ 2 & 0 \end{pmatrix}(p) = -\begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 \\ 2/7 & 5/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ 18/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 \\ -18/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

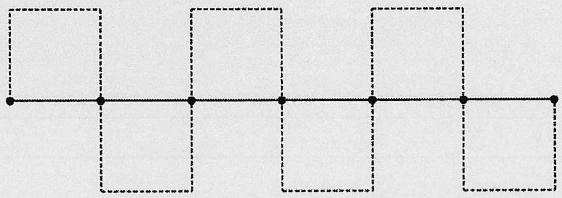
$\blacksquare$

Name:..

Aufgabe 8 (1+5+2=8 Punkte)

(i) Wir betrachten in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ die Strecke s von (0,0) nach (1,0). Sie hat die Länge 1. Die Strecke s wird nun auf folgende Weise approximiert: Für jede natürliche Zahl n wird s in n gleich lange Abschnitte eingeteilt und die Randpunkte jedes Streckenabschnitts über die drei Seiten eines Quadrats miteinander verbunden. Mit wachsendem n nähert sich die Folge der „Rechteck-Kurven" immer mehr der Strecke s an. Die Situation ist in nachfolgender Abbildung für den Fall $n = 6$ dargestellt.

Zeigen Sie, dass die Bogenlänge L der Rechteck-Kurven trotz der Annäherung an die Strecke s für *alle* Werte von n gleich 3 ist.

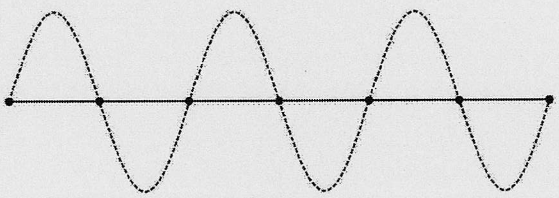


(ii) Die Strecke s wird nun in analoger Weise durch die Graphen der Funktionenfolge $f_n(x) = n^{-\alpha} \cdot \sin(n\pi x)$, $x \in [0,1]$, $\alpha > 0$, approximiert. Auch diese Folge von Kurven nähert sich mit wachsendem n immer mehr der Strecke s an. Die Situation ist für den Fall $n = 6$ und $\alpha = 1$ nachfolgend abgebildet.

Zeigen Sie, dass die Bogenlänge $L(f_n)$ der approximierenden Kurvenfolge für $n \to \infty$ und $\alpha > 1$ gegen die Länge der Strecke s, also gegen den Wert 1, konvergiert und dass sie für $n \to \infty$ und $\alpha < 1$ über alle Grenzen wächst.

Tipp: Schätzen Sie den Integranden des Bogenlängenintegrals für die beiden betrachteten Fälle auf jeweils geeignete Weise ab.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^1 |\cos(n\pi x)|\, dx = \frac{2}{\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.



(iii) Für $\alpha = 1$ ist die Bogenlänge der Kurvenfolge aus Aufgabenteil (ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ *konstant*. Begründen Sie dies elementar geometrisch, also *ohne* erneute Rechnung.

<u>Lösung</u>:

(i) Die Seitenlänge a der „aufgesetzten Quadrate" beträgt $a = \frac{1}{n}$. Der Umfang U_n jedes der n „Bogenstücke" der Rechteck-Kurve beträgt daher $U_n = \frac{3}{n}$. Die gesamte Bogenlänge L einer Rechteck-Kurve beträgt daher für alle $n \in \mathbb{N}$: $L = n \cdot U_n = 3$.

(ii) $\underline{\alpha > 1}$:

Für die Bogenlänge der Funktionenfolge f_n gilt:

$$L(f_n) = \int_0^1 \sqrt{1+\left(f_n'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(n^{1-\alpha}\cdot \pi \cos(n\pi x)\right)^2}\, dx$$

Da $1+\left(f_n'(x)\right)^2 \geq 1 \ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$ gilt somit zunächst $1 \leq L(f_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Betrachte nun:

$$\begin{aligned} L(f_n) &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(n^{1-\alpha}\cdot \pi \cos(n\pi x)\right)^2}\, dx \\ &\leq \int_0^1 \sqrt{1+\left(n^{1-\alpha}\cdot \pi\right)^2}\, dx \qquad \forall x: \cos^2(x) \in [0,1] \\ &= \sqrt{1+n^{2(1-\alpha)}\cdot \pi^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt für $\alpha > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} L(f_n) = 1$.

$\underline{\alpha < 1}$:

Für diesen Fall muss man den Integranden anders abschätzen:

$$\begin{aligned} L(f_n) &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(n^{1-\alpha}\cdot \pi \cos(n\pi x)\right)^2}\, dx \\ &\geq \int_0^1 \sqrt{\left(n^{1-\alpha}\cdot \pi \cos(n\pi x)\right)^2}\, dx \\ &= n^{1-\alpha}\cdot \pi \cdot \int_0^1 \left|\cos(n\pi x)\right| dx \qquad \text{Verwende Hinweis} \\ &= 2\cdot n^{1-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \end{aligned}$$

Somit gilt für $\alpha < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} L(f_n) = \infty$.

(iii) Für $\alpha = 1$ gilt:

$$f_n(x) = \tfrac{1}{n}\cdot \sin(n\pi x)$$

Der Graph der Funktion $f_1(x) = \sin(\pi x)$ wird somit *sowohl* in x- *als auch* in y-Richtung *proportional* zu n gestaucht. (Die Periode P von f_n beträgt $P = \frac{2\pi}{n\pi} = \frac{2}{n}$). Die n „Bögen" der Funktion f_n sind somit *<u>ähnlich</u>* zu dem (einen) Bogen der Funktion f_1, bzw. alle n Bögen sind *<u>maßstabsgerechte Verkleinerungen</u>* dieses Bogens im Maßstab $1:n$. Die Bogenlänge jedes einzelnen der n Bögen beträgt demzufolge $\frac{1}{n}$ des Bogens von f_1. Somit haben alle Kurven f_n – völlig analog zu der Folge von Rechteck-Kurven in Aufgabenteil (i) – die konstante Bogenlänge

$$L(f_n) = \int_0^1 \sqrt{1+\left(f_n'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(f_1'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\pi\cdot\cos(\pi x)\right)^2}\, dx$$