

Name:

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Es gibt eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ welche weder offen noch abgeschlossen ist.

wahr ☐ falsch ☐

2. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Erhält man für den Mittelwert M von $|f|$ auf $[a, b]$ den Wert $M = 0$, dann folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

wahr ☐ falsch ☐

3. Eine Teilmenge $K \subset X$ eines Hausdorffraums $(X, \mathfrak{X})$ ist genau dann kompakt, wenn es eine Überdeckung von K durch endlich viele offene Teilmengen von X gibt.

wahr ☐ falsch ☐

4. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, so ist f in x auch stetig.

wahr ☐ falsch ☐

5. Für jede rektifizierbare Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ihre Länge L gegeben durch $L = \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt$.

wahr ☐ falsch ☐

6. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar.

wahr ☐ falsch ☐

7. Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\text{grad } f(x) = 0$ und $\text{Hess } f(x)$ positiv semidefinit. Dann besitzt f in x ein lokales Minimum.

wahr ☐ falsch ☐

8. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann ist jede Lösung der linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ stets auf dem gesamten Intervall I definiert.

wahr ☐ falsch ☐

Name:

Aufgabe 2 (3+2+3=8 Punkte)

Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|.$$

Zeigen Sie:

- (i) $(\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.
- (ii) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Metrik, so ist $(\ln(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$.
- (iii) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

Hinweis: Betrachten Sie eine Nullfolge bezüglich der euklidischen Metrik.

Name:

Aufgabe 3 (2+3+3=8 Punkte)

Es beschreibe $A(h)$ die Oberfläche eines Gartenteiches in Abhängigkeit von der Höhe h des Wasserspiegels. Das in dem Teich befindliche Wasservolumen ist ebenfalls eine Funktion der Höhe des Wasserspiegels und sei mit $V(h)$ bezeichnet.

- (i) Zeigen Sie, dass es sich bei der Funktion $V(h)$ um eine Stammfunktion der Funktion $A(h)$ handelt. Betrachten Sie hierzu die Volumenänderung ΔV für hinreichend kleine Änderungen Δh . Nennen Sie die Eigenschaft der Funktion $A(h)$, die Sie hierbei voraussetzen müssen, und nehmen Sie dazu Stellung, inwiefern dies im gegebenen Sachkontext gerechtfertigt ist.
- (ii) Die Oberfläche des Teiches werde durch folgende Funktion beschrieben:

$$A(h) = \begin{cases} h \cdot \ln(h^2) + 5 & \text{falls } h > 0 \\ 5 & \text{falls } h = 0 \end{cases}$$

Die Höhe h ist hierbei in m und die Oberfläche $A(h)$ in m^2 angegeben. Bestimmen Sie die Funktion $V(h)$ für den Gartenteich.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $A(h)$ stetig in $h = 0$ ist.

- (iii) Die Höhe des Wasserspiegels variiert für gewöhnlich nur wenig um den Wert $h = 1$. Approximieren Sie die Funktion $A(h)$ an der Stelle $h = 1$ *linear* – die Approximation sei mit L bezeichnet – und berechnen Sie mit Hilfe von L , um wieviel Liter das Wasservolumen im Teich bei Änderung des Wasserspiegels von $h = 1$ auf $h = 1,1$ (näherungsweise) zunimmt.

Name:

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist und berechnen Sie das totale Differential.

Name:

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\varphi : [1, 16] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t-1} \end{pmatrix}.$$

Name:

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Es sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^2$ offen ist und bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x \ln(x + y) - y.$$

Name:

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + uy + \exp(v) = 0$$

$$2x + u^2 - uv = 5$$

auf einer Umgebung um den Punkt $p = (x, y, u, v) = (2, 5, -1, 0)$ auf eindeutige Weise nach (u, v) aufgelöst, d.h. in der Form

$$(u, v) = \varphi(x, y)$$

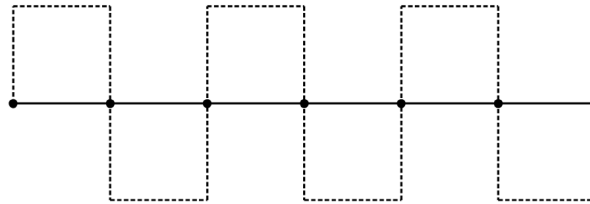
mit $\varphi(2, 5) = (-1, 0)$ geschrieben werden kann und berechnen Sie das totale Differential von φ im Punkt $(2, 5)$.

Name:

Aufgabe 8 (1+5+2=8 Punkte)

- (i) Wir betrachten in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ die Strecke s von $(0,0)$ nach $(1,0)$. Sie hat die Länge 1. Die Strecke s wird nun auf folgende Weise approximiert: Für jede natürliche Zahl n wird s in n gleich lange Abschnitte eingeteilt und die Randpunkte jedes Streckenabschnitts über die drei Seiten eines Quadrats verbunden. Mit wachsendem n nähert sich die Folge der „Rechteck-Kurven“ also immer mehr der Strecke s an. Die Situation ist in nachfolgender Abbildung für den Fall $n = 6$ dargestellt.

Zeigen Sie, dass die Bogenlänge L der Rechteck-Kurven trotz der Annäherung an die Strecke s für *alle* Werte von n gleich 3 ist.

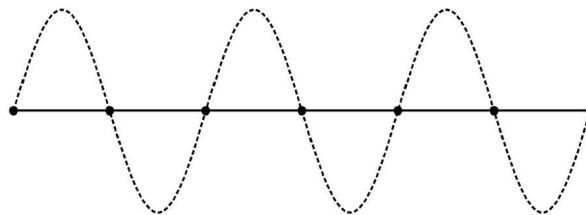


- (ii) Die Strecke s wird nun in analoger Weise durch die Graphen der Funktionenfolge $f_n(x) = n^{-\alpha} \cdot \sin(n\pi x)$, $x \in [0,1]$, $\alpha > 0$, approximiert. Auch diese Folge von Kurven nähert sich mit wachsendem n immer mehr der Strecke s an. Die Situation ist für den Fall $n = 6$ und $\alpha = 1$ nachfolgend abgebildet.

Zeigen Sie, dass die Bogenlänge $L(f_n)$ der approximierenden Kurvenfolge für $n \rightarrow \infty$ und $\alpha > 1$ gegen die Länge der Strecke s , also gegen den Wert 1, konvergiert und dass sie für $n \rightarrow \infty$ und $\alpha < 1$ über alle Grenzen wächst.

Tipp: Schätzen Sie den Integranden des Bogenlängenintegrals für die beiden betrachteten Fälle auf jeweils geeignete Weise ab.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^1 |\cos(n\pi x)| dx = \frac{2}{\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.



- (iii) Für $\alpha = 1$ ist die Bogenlänge $L(f_n)$ der Kurvenfolge aus Aufgabenteil (ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ *konstant*. Begründen Sie dies elementar geometrisch, also *ohne* erneute Rechnung.

Name:

Zusatzblatt 1

Name:

Zusatzblatt 2