Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2012/2013

B

Klausur zur Analysis II

Samstag, den 09.02.2013, 09:15–12:00 Uhr,
Hörsäle 00/0030 und +1/0020, Hörsaalgebäude Biegenstraße

Name: ....

Vorname: Musterlösung

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 56 Punkte erwartet, d.h. 56 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
max. Punkte	8	8	8	8	8	8	8	8	64
erreichte Punkte									

Name: ....

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist entweder offen oder abgeschlossen.

   wahr ☐ *falsch* ☒

2. Jede Topologie auf einer Menge X wird von einer Metrik auf X induziert.

   wahr ☐ *falsch* ☒

3. Ist (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge, dann ist jede stetige Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt.

   wahr ☒ *falsch* ☐

4. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, dann gilt für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

   wahr ☐ *falsch* ☒

5. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, dann existieren in x alle partiellen Ableitungen aller Komponentenfunktionen f_i von f.

   wahr ☒ *falsch* ☐

6. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $x \in \mathbb{R}^n$ sei ein lokales Minimum von f. Dann ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und $\operatorname{Hess} f(x)$ positiv definit.

   wahr ☐ *falsch* ☒

7. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, welche $\det(Df(x)) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, ist ein Diffeomorphismus.

   wahr ☐ *falsch* ☒

8. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung. Dann ist das Anfangswertproblem $y' = f(t, y)$ mit $y(a) = b$ für jeden Punkt $(a, b) \in U$ auf einer kleinen Umgebung um a eindeutig lösbar.

   wahr ☒ *falsch* ☐

Name: ....

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und

$$d' : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben durch

$$d'(p,q) = \frac{d(p,q)}{1 + d(p,q)}.$$

Zeigen Sie, dass (M, d') ebenfalls ein metrischer Raum ist.

- $$d'(p,q) = 0 \iff \frac{d(p,q)}{1+d(p,q)} = 0$$

  $$\iff d(p,q) = 0$$

  $$\overset{d \text{ Metrik}}{\iff} p = q \qquad \text{ok.}$$

- Symmetrie:

  $$d'(p,q) = \frac{d(p,q)}{1+d(p,q)} \overset{d \text{ Metrik}}{=} \frac{d(q,p)}{1+d(q,p)} = d'(q,p) \qquad \text{ok.}$$

- Dreiecksungleichung: ∘ Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen mit $a \leq b + c$.

  Behauptung: $$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \qquad (*)$$

  Denn: $$(*) \iff \frac{a(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \leq \frac{b(1+a)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} + \frac{c(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

  $$\iff a(1+b)(1+c) \leq b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b)$$

  $$\iff a + ab + ac + abc \leq b + ab + bc + abc + c + ac + bc + abc$$

  $$\iff a \leq b + bc + c + bc + abc$$

$$\Leftrightarrow \quad a \leq b + c + (2bc + abc).$$

Wegen $a \leq b+c$ nach Voraussetzung und $2bc + abc \geq 0$ ist diese letzte Ungleichung richtig und $(*)$ damit gezeigt.

- Sind nun $p, q, s \in M$, dann:

$$d'(p,q) = \frac{d(p,q)}{1+d(p,q)} \overset{(*)}{\leq} \frac{d(p,s)}{1+d(p,s)} + \frac{d(s,q)}{1+d(s,q)} = d'(p,s) + d'(s,q)$$

wobei wir bei der Anwendung von $(*)$ benutzt haben, dass

$$d(p,q) \leq d(p,s) + d(s,q) \quad \text{und} \quad d(p,q), d(p,s), d(s,q) \geq 0$$

gilt, da d eine Metrik ist.

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume sowie $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ zwei stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$V := \{p \in X \mid f(p) = g(p)\} \subset X$$

abgeschlossen ist.

- Sei $p \in X$ ein Häufungspunkt von V.

$\Rightarrow$ Es existiert eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$p_k \in V \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} p_k = p$$

Da f und g stetig sind, ist

$$\lim_{k\to\infty} f(p_k) = f(p) \quad \text{sowie} \quad \lim_{k\to\infty} g(p_k) = g(p).$$

Da $p_k \in V \ \forall k \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. $f(p_k) = g(p_k) \ \forall k \in \mathbb{N}$, folgt:

$$f(p) = \lim_{k\to\infty} f(p_k) = \lim_{k\to\infty} g(p_k) = g(p).$$

$\Rightarrow p \in V$.

- Ist nun $p \in \overline{V}$, dann ist (Vorlesung) $p \in V$ oder p ein Häufungspunkt von V. In jedem Fall also $p \in V$.

$\Rightarrow \overline{V} \subset V$.

Da nach Vorlesung stets $V \subset \overline{V}$ gilt, folgt: $V = \overline{V}$.

$\Rightarrow V$ ist abgeschlossen.

Name: ....

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$g_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(tp)$$

stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

(i) • Für $p = 0$ ist $g_p \equiv 0$ und damit stetig.

• Sei also $p = (p_1, p_2) \neq (0,0)$. In diesem Fall ist

$$g_p(t) = f(tp) = \begin{cases} \frac{t^2 p_1^2 t p_2}{t^4 p_1^4 + t^2 p_2^2} & \text{falls } t \neq 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

Ist $p_1 = 0$ oder $p_2 = 0$, dann ist also ebenfalls $g_p \equiv 0$ und damit stetig. Wir Können also $p_1 \neq 0$ und $p_2 \neq 0$ annehmen. In diesem Fall ist

$$g_p(t) = \begin{cases} \frac{t p_1^2 p_2}{t_2 p_1^4 + p_2^2} & \text{falls } t \neq 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{t p_1^2 p_2}{t^2 p_1^4 + p_2^2}$$

denn wegen $t^2 p_1^4 + p_2^2 \geq p_2^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

sowie $\frac{t p_1^2 p_2}{t^2 p_1^4 + p_2^2} = 0$ für $t = 0$

gibt es kein Problem mit der Wohldefiniertheit.

$\Rightarrow \quad g_p(t) = \dfrac{t p_1^2 p_2}{t^2 p_1^4 + p_2^2}$ ist stetig

(ii) Wir betrachten die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right).$$

Offenbar ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,0)$.

↯ f wäre in (0,0) stetig.

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(0,0) = 0$.

Da aber $a_n \neq (0,0) \ \forall n\in\mathbb{N}$ gilt, berechnen wir:

$$f(a_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{2\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$. ↯

$\Rightarrow$ f ist im Punkt (0,0) nicht stetig. ■

Name: ....

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(\|x\|_2)$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar ist und berechnen Sie das totale Differential.

- Wir betrachten zunächst den Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$.

Da g in $0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, mit $g'(0) = 0$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ um $0 \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$\varphi : U \to \mathbb{R}$$

so dass gilt:

$$g(x) = g(0) + g'(0) \cdot x + \varphi(x) \qquad \forall x \in U$$

$$= g(0) + \varphi(x)$$

sowie $$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{|x|} = 0 .$$

Da $U \subset \mathbb{R}$ Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ ist, ist $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$ geeignet. Wir definieren

$$V := U_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ V ist Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ und $\|x\|_2 \in U \quad \forall x \in V$.

Wir erhalten also:

$$f(x) = g(\|x\|_2) = g(0) + \varphi(\|x\|_2)$$

$$\overset{f(0)=g(\|0\|_2)=g(0)}{=} f(0) + \varphi(\|x\|_2) \qquad \forall x \in V$$

$$= f(0) + \psi(x)$$

wobei $\psi : V \to \mathbb{R}$ definiert ist als $\psi(x) :\!= \varphi(\|x\|_2)$.

Es genügt nun zu zeigen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{\|x\|_2} = 0$$

Dann ist f per Definition in $0 \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar mit

$$Df(0) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^{1\times n}).$$

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dann ist $(\|a_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n\|_2 = 0$.

Also folgt wegen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{|x|} = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(a_n)}{\|a_n\|_2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\|a_n\|_2)}{|\,\|a_n\|_2\,|} = 0$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig war, erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{\|x\|_2} = 0$$

ok.

• Wir definieren nun

$$F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

und berechnen für $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{\|x\|_2}$$

d.h. alle partiellen Ableitungen von F sind in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig.

$\overset{VL}{\Rightarrow}$ F ist in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ total differenzierbar, mit

$$DF(x) = \left(\frac{x_1}{\|x\|_2}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_2} \right) = \frac{1}{\|x\|_2} \cdot x$$

Da für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ offenbar $f(x) = g \circ F(x)$ gilt, ist f nach der Kettenregel in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ total differenzierbar, mit

$$Df(x) = Dg(F(x)) \cdot DF(x) = g'(\|x\|_2) \cdot \frac{1}{\|x\|_2} \cdot x$$

$$= \frac{g'(\|x\|_2)}{\|x\|_2} \cdot x .$$

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ alle kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder kein lokales Extremum handelt.

- Bestimmen Kritische Punkte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3\alpha y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2 + 3\alpha x$$

$$\Rightarrow (\operatorname{grad} f)(x,y) = \left(3x^2 + 3\alpha y, -3y^2 + 3\alpha x\right) = 3\left(x^2 + \alpha y, -y^2 + \alpha x\right)$$

d.h. $(\operatorname{grad} f)(x,y) = (0,0) \iff \left[\begin{array}{l} x^2 = -\alpha y \\ y^2 = \alpha x \end{array}\right.$ $\qquad (*)$

Also: In jedem Fall ist $(0,0)$ ein Kritischer Punkt.

- Falls $\alpha = 0$ gilt, lautet $(*)$: $x^2 = 0$, $y^2 = 0$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist einziger Kritischer Punkt

- Falls $\alpha > 0$ ist, folgt zunächst aus $(*)$:

$x > 0$ und $y < 0$ (notwendig).

Also: $x = +\sqrt{-\alpha y} \Rightarrow y^2 = \alpha\sqrt{-\alpha y} \Rightarrow y^4 = -\alpha^3 y$

$\Rightarrow y^3 = -\alpha^3 \Rightarrow y = -\alpha$

$\Rightarrow x = +\sqrt{\alpha^2} = |\alpha| \overset{\alpha>0}{=} \alpha$

Einziger weiterer Kritischer Punkt: $(\alpha, -\alpha)$

- Falls $\alpha < 0$ ist, folgt zunächst aus $(*)$:

$x < 0$ und $y > 0$ (notwendig)

Also: $x = -\sqrt{-\alpha y} \Rightarrow y^2 = -\alpha\sqrt{-\alpha y} \Rightarrow y^4 = -\alpha^3 y$

$$\Rightarrow y = -\alpha$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\alpha^2} = -|\alpha| \overset{\alpha<0}{=} \alpha$$

Einziger weiterer kritischer Punkt ist auch in diesem Fall: $(\alpha, -\alpha)$.

- Untersuchung der kritischen Punkte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = -6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3\alpha$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Hess}\, f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix} \Rightarrow \det((\mathrm{Hess}\, f)(x,y)) = -36xy - 9\alpha^2$$

- Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

$\det((\mathrm{Hess}\, f)(0,0)) = -9\alpha^2 < 0$ falls $\alpha \neq 0$ ist.

$\Rightarrow$ Falls $\alpha \neq 0$ ist, ist die Hessematrix indefinit, d.h. f besitzt in $(0,0)$ kein Extremum

Ist dagegen $\alpha = 0$, dann liegt nur Semidefinitheit vor (Nullmatrix) und wir müssen direkt rechnen. Sei also V eine beliebige offene Umgebung um $(0,0)$.

$\Rightarrow$ $U_\varepsilon(0,0) \subset V$ für ein $\varepsilon > 0$ geeignet und für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ $(\frac{1}{n}, 0) \in V$ mit $f(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^3} > 0$

$(0, \frac{1}{n}) \in V$ mit $f(0, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^3} < 0$

$\overset{V \text{ beliebig}}{\Longrightarrow}$ Auch im Fall $\alpha = 0$ liegt in $(0,0)$ kein Extremum vor.

- Punkt $(\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^2$ im Fall $\alpha \neq 0$.

Es ist $\det((\mathrm{Hess} f)(\alpha,-\alpha)) = 27\alpha^2 > 0$. Damit:

Falls $\alpha > 0$:

$\Rightarrow 6\alpha > 0 \Rightarrow$ Hessematrix positiv definit

$\Rightarrow$ lokales Minimum in $(\alpha, -\alpha)$

Falls $\alpha < 0$:

$\Rightarrow 6\alpha < 0 \Rightarrow$ Hessematrix negativ definit

$\Rightarrow$ lokales Maximum in $(\alpha, -\alpha)$.

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 - u^2 - v = 0$$
$$x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 = 1$$

auf einer kleinen Umgebung um den Punkt $p = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ auf eindeutige Weise nach (u, v) aufgelöst, d.h. in der Form

$$(u, v) = \varphi(x, y)$$

geschrieben werden kann und berechnen Sie das totale Differential von φ im Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

- Wir definieren $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$(x,y,u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2-u^2-v \\ x^2+2y^2+3u^2+4v^2-1 \end{pmatrix}^t .$$

$\Rightarrow$ F ist stetig partiell differenzierbar und die Lösungen des vorgelegten Gleichungssystems sind genau die Nullstellen von F. Es ist

$$F(p) = \begin{pmatrix} 1/4 - 1/4 \\ 1/4 + 3 \cdot 1/4 - 1 \end{pmatrix}^t = (0,0) \quad \text{d.h. } p \text{ ist Lösung}$$

des Gleichungssystems. Außerdem:

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & -1 \\ 6u & 8v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \det\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)\right) = 3 \neq 0$$

also ist $\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)$ invertierbar und der Satz über implizite Funktionen anwendbar.

$\overset{SIF}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $U \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von $(\frac{1}{2}, 0)$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von $(\frac{1}{2}, 0)$ sowie eine stetig partiell differenzierbare Abbildung

$$\varphi : U \to V$$

so dass in $U \times V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ gilt:

$$F(x,y,u,v) = 0 \iff \varphi(x,y) = (u,v).$$

Also kann das Gleichungssystem auf der Umgebung $U \times V$ auf eindeutige Weise nach (u,v) aufgelöst werden.

- Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt:

$$D\varphi\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(p)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(p)\right)$$

$$= -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -4/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 4/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Name: ....

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Bestimmen Sie für folgendes Anfangswertproblem die Lösung und ihr maximales Existenzintervall:

$$y' = -\sin(x)\frac{1+y^2}{y} \text{ auf } \mathbb{R} \times (0,\infty), \quad y(0) = 1$$

- Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen: $y' = f(x)g(y)$ mit

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\sin(x), \quad g: (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{1+y^2}{y}.$$

- Wir gehen wie in der Vorlesung besprochen vor:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x) := \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x -\sin(t)\,dt = \cos(x) - 1.$$

$$G: (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto G(y) := \int_1^y \frac{1}{g(t)}\,dt = \int_1^y \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^y \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|1+t^2|)\Big|_1^y = \frac{1}{2}\left(\ln(1+y^2) - \ln(2)\right).$$

- Da G offenbar streng monoton wachsend ist, ist

$$G((0,\infty)) = \left(-\frac{1}{2}\ln(2),\ \infty\right) \subset \mathbb{R}.$$

Wir suchen $J \subset \mathbb{R}$ maximal mit $F(J) \subset \left(-\frac{1}{2}\ln(2), \infty\right)$, $0 \in J$.

Es ist $F(J) \subset (-2,0)$ $\forall J \subset \mathbb{R}$ und wegen $\exp(x) > x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\ln(x) < x$ $\forall x \in (0,\infty)$ also:

$$0 > -\frac{1}{2}\ln(2) > -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$$

Wegen der Symmetrie von F ist also

$$J := \left(-\arccos\left(-\tfrac{1}{2}\ln(2)+1\right),\ \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\ln(2)+1\right)\right) \subset \mathbb{R}$$

das maximale Intervall in $\mathbb{R}$ mit $0 \in J$ und $F(J) \subset G((0,\infty))$.

- Nach Vorlesung existiert nun genau eine Lösung

$$\varphi : J \to \mathbb{R}$$

des Anfangswertproblems auf J und diese genügt der Gleichung

$$G(\varphi(x)) = F(x) \quad \forall x \in J$$

d.h.

$$\frac{1}{2}\left(\ln(1+\varphi(x)^2) - \ln(2)\right) = \cos(x) - 1 \qquad \forall x \in J$$

$$\Rightarrow \ln(1+\varphi(x)^2) - \ln(2) = 2(\cos(x)-1) \qquad \forall x \in J$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1+\varphi(x)^2) = \exp(2(\cos(x)-1)) \qquad \forall x \in J$$

$$\Rightarrow \varphi(x)^2 = 2\exp(2(\cos(x)-1)) - 1 \qquad \forall x \in J$$

Wegen $\varphi(0) = 1$ müssen wir $+\sqrt{\cdot}$ auswählen.

$$\Rightarrow \varphi(x) = +\sqrt{2\exp(2(\cos(x)-1))-1} \quad \text{auf } J$$

ist die gesuchte Lösung mit ihrem maximalen Existenzintervall.

$\blacksquare$