Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2012/2013

L

# Klausur zur Analysis II

Samstag, den 09.02.2013, 09:15–12:00 Uhr,
Hörsäle 00/0030 und +1/0020, Hörsaalgebäude Biegenstraße

**Name:** ..........................................

**Vorname:** MusterLösung

**Matrikelnummer:** ..........................................

**Studiengang:** ..........................................

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 56 Punkte erwartet, d.h. 56 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 64 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

Name: ..........................................................................

**Aufgabe 1 (8 Punkte)**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist entweder offen oder abgeschlossen.

   *wahr* ☐ *falsch* ☒

2. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Kurven $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine stetige Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Folge der Bogenlängen $(L(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $L(f)$.

   *wahr* ☐ *falsch* ☒

3. Ist $(M,d)$ ein kompakter metrischer Raum und $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge, dann ist jede stetige Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

4. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, dann gilt für alle $1 \leqslant i,j \leqslant n$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

   *wahr* ☐ *falsch* ☒

5. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, dann existieren in $x$ alle partiellen Ableitungen aller Komponentenfunktionen $f_i$ von $f$.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

6. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $x \in \mathbb{R}^n$ sei ein lokales Minimum von $f$. Dann ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und $\operatorname{Hess} f(x)$ positiv definit.

   *wahr* ☐ *falsch* ☒

7. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist der Mittelwert aller Steigungen von $f$ auf $[a,b]$ gleich der Sekantensteigung durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

8. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung. Dann ist das Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$ mit $y(a) = b$ für jeden Punkt $(a,b) \in U$ auf einer kleinen Umgebung um $a$ eindeutig lösbar.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

Name: ..........................................................................

**Aufgabe 2 (8 Punkte)**
Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und

$$d' : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben durch

$$d'(p,q) = \frac{d(p,q)}{1 + d(p,q)}.$$

Zeigen Sie, dass $(M, d')$ ebenfalls ein metrischer Raum ist.

- $d'(p,q) = 0 \iff \dfrac{d(p,q)}{1+d(p,q)} = 0$

$$\iff d(p,q) = 0$$

$$\overset{d \text{ Metrik}}{\iff} p = q \qquad \text{ok.}$$

- Symmetrie:

$$d'(p,q) = \frac{d(p,q)}{1+d(p,q)} \overset{\substack{d \text{ Metrik}\\ \downarrow}}{=} \frac{d(q,p)}{1+d(q,p)} = d'(q,p) \qquad \text{ok.}$$

- Dreiecksungleichung: • Seien $a, b, c$ nichtnegative reelle Zahlen mit $a \leq b + c$.

Behauptung: $\dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c} \qquad (*)$

Denn: $(*) \iff \dfrac{a(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \leq \dfrac{b(1+a)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} + \dfrac{c(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)}$

$$\iff a(1+b)(1+c) \leq b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b)$$

$$\iff a + ab + ac + abc \leq b + ab + bc + abc + c + ac + bc + abc$$

$$\iff a \leq b + bc + c + bc + abc$$

$\Leftrightarrow \quad a \leq b + c + (2bc + abc).$

Wegen $a \leq b+c$ nach Voraussetzung und $2bc + abc \geq 0$ ist diese letzte Ungleichung richtig und $(*)$ damit gezeigt.

- Sind nun $p, q, s \in M$, dann:

$$d'(p,q) = \frac{d(p,q)}{1+d(p,q)} \overset{(*)}{\leq} \frac{d(p,s)}{1+d(p,s)} + \frac{d(s,q)}{1+d(s,q)} = d'(p,s) + d'(s,q)$$

wobei wir bei der Anwendung von $(*)$ benutzt haben, dass

$$d(p,q) \leq d(p,s) + d(s,q) \quad \text{und} \quad d(p,q), d(p,s), d(s,q) \geq 0$$

gilt, da $d$ eine Metrik ist.

$\blacksquare$

Name: ....................................................................................

**Aufgabe 3 (8 Punkte)**

Es seien $(X, d)$ und $(Y, d')$ metrische Räume sowie $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ zwei stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$V := \{p \in X \mid f(p) = g(p)\} \subset X$$

abgeschlossen ist.

- Sei $p \in X$ ein Häufungspunkt von $V$.

$\Rightarrow$ Es existiert eine Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $X$ mit

$p_k \in V \; \forall k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k \to \infty} p_k = p$

Da $f$ und $g$ stetig sind, ist

$\lim\limits_{k \to \infty} f(p_k) = f(p)$ sowie $\lim\limits_{k \to \infty} g(p_k) = g(p)$.

Da $p_k \in V \; \forall k \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. $f(p_k) = g(p_k) \; \forall k \in \mathbb{N}$, folgt:

$$f(p) = \lim_{k \to \infty} f(p_k) = \lim_{k \to \infty} g(p_k) = g(p).$$

$\Rightarrow p \in V$.

- Ist nun $p \in \overline{V}$, dann ist (Vorlesung) $p \in V$ oder $p$ ein Häufungspunkt von $V$. In jedem Fall also $p \in V$.

$\Rightarrow \overline{V} \subset V$.

Da nach Vorlesung stets $V \subset \overline{V}$ gilt, folgt: $V = \overline{V}$.

$\Rightarrow V$ ist abgeschlossen. $\blacksquare$

Name: ..............................................................................

**Aufgabe 4 (8 Punkte)**

In der Schule approximiert man den Inhalt der Fläche unterhalb einer positiven Funktion $f$ in einem Intervall $I = [a, b]$ oftmals durch äquidistante Zerlegung des Intervalls in $n$ Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ gleicher Breite (mit $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, ..., n$) sowie der nachfolgenden Berechnung des Flächeninhalts unterhalb des Polygonzuges $P$, welcher die Punkte $(x_k, f(x_k))$ miteinander verbindet. Dieser Flächeninhalt sei im Folgenden mit $P_n(f)$ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$P_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

(ii) Man könnte in dem Bemühen um Einfachheit versucht sein, aus dem beschriebenen Verfahren folgende Definition für das bestimmte Integral abzuleiten:

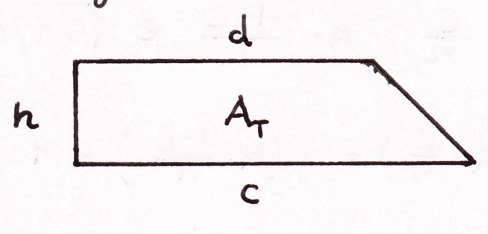
$$\int_a^b f \; := \lim_{n\to\infty} P_n(f)$$

Begründen Sie, warum dieses Integral – nennen wir es das *p-äqui-Integral* – für die Klasse der auf $[a, b]$ stetigen Funktionen mit dem Riemann-Integral übereinstimmt.

(iii) Leider hat das *p-äqui-Integral* einige "unerwünschte" Eigenschaften. Beispielweise ist es nicht *intervall-additiv*. Weisen Sie dies durch explizite Rechnung nach für die auf dem Intervall $[0, 1]$ betrachtete Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Die Fläche unter dem Polygonzug $P$ besteht aus $n$ Trapezen jeweils gleicher Höhe $h = \frac{b-a}{n}$.




Mit $A_T = h \cdot \frac{1}{2} \cdot (c+d)$ und $c = f(x_{k-1})$, $d = f(x_k)$ folgt somit durch Aufsummieren der $n$ Trapezflächen und Ausklammern der Höhe die Beh. //

(ii) $f$ nach Vor. stetig auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f$ Riemann-intbar

<u>Zeige:</u> $(P_n(f))$ ist Folge von Riemannschen Summen, bei der die Feinheit der Unterteilung gegen 0 geht. $\Rightarrow$ Beh.

$f$ stetig auf $[x_{k-1}, x_k]$, $\frac{1}{2}\cdot(f(x_{k-1})+f(x_k)) \in [f(x_{k-1}), f(x_k)]$

$$\overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists \tilde{x}_k \in [x_{k-1}, x_k] : f(\tilde{x}_k) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right)$$

$\Rightarrow$ $P_n(f)$ ist Riemannsche Summe. Die Feinheit der Zerlegung ist $\frac{b-a}{n} \to 0$. //

(iii) Es gilt: $\frac{k}{n} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $k = 0,1,\dots,n$

$$\Rightarrow f(x_k) = \pi, \quad k = 0,1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \fint_0^1 f = \lim_{n\to\infty} P_n(f) = \pi$$

Sei nun $\varepsilon \in [0,1] \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ beliebig

$$\Rightarrow k\cdot\frac{\varepsilon}{n},\ k\cdot\frac{1-\varepsilon}{n} \in [0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \quad k = 0,1,\dots,n$$

$$\Rightarrow f\left(k\cdot\frac{\varepsilon}{n}\right) = f\left(k\cdot\frac{1-\varepsilon}{n}\right) = 1 \quad k = 0,1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \fint_0^\varepsilon f + \fint_\varepsilon^1 f = \varepsilon\cdot 1 + (1-\varepsilon)\cdot 1 = 1 \neq \pi$$

$\Rightarrow$ Beh. //

Name: ..............................................................................

**Aufgabe 5 (8 Punkte)**

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(\|x\|_2)$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar ist und berechnen Sie das totale Differential.

- Wir betrachten zunächst den Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$.

Da $g$ in $0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, mit $g'(0) = 0$ gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ um $0 \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$\varphi : U \to \mathbb{R}$$

so dass gilt:

$$g(x) = g(0) + g'(0) \cdot x + \varphi(x) \qquad \forall x \in U$$

$$= g(0) + \varphi(x)$$

sowie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{|x|} = 0$.

Da $U \subset \mathbb{R}$ Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ ist, ist $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$ geeignet. Wir definieren

$$V := U_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ $V$ ist Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ und $\|x\|_2 \in U \quad \forall x \in V$.

Wir erhalten also:

$$f(x) = g(\|x\|_2) = g(0) + \varphi(\|x\|_2)$$

$f(0)=g(\|0\|_2)$
$=g(0)$

$$= f(0) + \varphi(\|x\|_2) \qquad \forall x \in V$$

$$= f(0) + \psi(x)$$

wobei $\psi : V \to \mathbb{R}$ definiert ist als $\psi(x) := \varphi(\|x\|_2)$.

Es genügt nun zu zeigen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{\|x\|_2} = 0$$

Dann ist $f$ per Definition in $0 \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar mit

$$Df(0) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^{1\times n}).$$

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $V$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann ist $(\|a_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $U$ mit $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_2 = 0$.
Also folgt wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{|x|} = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(a_n)}{\|a_n\|_2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\|a_n\|_2)}{|\,\|a_n\|_2\,|} = 0$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig war, erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{\|x\|_2} = 0$$

ok.

- Wir definieren nun

$$F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

und berechnen für $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{\|x\|_2}$$

d.h. alle partiellen Ableitungen von $F$ sind in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig.

$\overset{VL}{\Rightarrow}$ $F$ ist in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ total differenzierbar, mit

$$DF(x) = \left( \frac{x_1}{\|x\|_2}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_2} \right) = \frac{1}{\|x\|_2} \cdot x$$

Da für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ offenbar $f(x) = g \circ F(x)$ gilt, ist $f$ nach der Kettenregel in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ total differenzierbar, mit

$$Df(x) = Dg(F(x)) \cdot DF(x) = g'(\|x\|_2) \cdot \frac{1}{\|x\|_2} \cdot x$$

$$= \frac{g'(\|x\|_2)}{\|x\|_2} \cdot x .$$

$\blacksquare$

Name: ....................................................................................

**Aufgabe 6 (8 Punkte)**

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ alle kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder kein lokales Extremum handelt.

- Bestimmen kritische Punkte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3\alpha y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2 + 3\alpha x$$

$$\Rightarrow (\operatorname{grad} f)(x,y) = \left(3x^2 + 3\alpha y, -3y^2 + 3\alpha x\right) = 3\left(x^2 + \alpha y, -y^2 + \alpha x\right)$$

d.h. $(\operatorname{grad} f)(x,y) = (0,0) \iff \left[\begin{array}{l} x^2 = -\alpha y \\ y^2 = \alpha x \end{array}\right.$ $(*)$

Also: In jedem Fall ist $(0,0)$ ein kritischer Punkt.

- Falls $\alpha = 0$ gilt, lautet $(*)$: $x^2 = 0$, $y^2 = 0$

$\Rightarrow (0,0)$ ist einziger kritischer Punkt

- Falls $\alpha > 0$ ist, folgt zunächst aus $(*)$:

$x > 0$ und $y < 0$ (notwendig).

Also: $x = +\sqrt{-\alpha y} \Rightarrow y^2 = \alpha\sqrt{-\alpha y} \Rightarrow y^4 = -\alpha^3 y$

$$\Rightarrow y^3 = -\alpha^3 \qquad \Rightarrow y = -\alpha$$

$$\Rightarrow x = +\sqrt{\alpha^2} = |\alpha| \overset{\alpha>0}{=} \alpha$$

Einziger weiterer kritischer Punkt: $(\alpha, -\alpha)$

- Falls $\alpha < 0$ ist, folgt zunächst aus $(*)$:

$x < 0$ und $y > 0$ (notwendig)

Also: $x = -\sqrt{-\alpha y} \Rightarrow y^2 = -\alpha\sqrt{-\alpha y} \Rightarrow y^4 = -\alpha^3 y$

$$\Rightarrow y = -\alpha$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\alpha^2} = -|\alpha| \overset{\alpha<0}{=} \alpha$$

Einziger weiterer kritischer Punkt ist auch in diesem Fall: $(\alpha, -\alpha)$.

- Untersuchung der kritischen Punkte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = -6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3\alpha$$

$$\Rightarrow (\text{Hess } f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix} \Rightarrow \det((\text{Hess } f)(x,y)) = -36xy - 9\alpha^2$$

- Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

$\det((\text{Hess } f)(0,0)) = -9\alpha^2 < 0$ falls $\alpha \neq 0$ ist.

$\Rightarrow$ Falls $\alpha \neq 0$ ist, ist die Hessematrix indefinit, d.h. $f$ besitzt in $(0,0)$ kein Extremum

Ist dagegen $\alpha = 0$, dann liegt nur Semidefinitheit vor (Nullmatrix) und wir müssen direkt rechnen. Sei also $V$ eine beliebige offene Umgebung um $(0,0)$.

$\Rightarrow$ $U_\varepsilon(0,0) \subset V$ für ein $\varepsilon > 0$ geeignet und für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in V$ mit $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^3} > 0$

$\left(0, \frac{1}{n}\right) \in V$ mit $f\left(0, \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3} < 0$

$\overset{V \text{ beliebig}}{\Longrightarrow}$ Auch im Fall $\alpha = 0$ liegt in $(0,0)$ kein Extremum vor.

- Punkt $(\alpha,-\alpha) \in \mathbb{R}^2$ im Fall $\alpha \neq 0$.

Es ist $\det\big((\mathrm{Hess} f)(\alpha,-\alpha)\big) = 27\alpha^2 > 0$. Damit:

Falls $\alpha > 0$:

$\Rightarrow 6\alpha > 0 \quad \Rightarrow$ Hessematrix positiv definit

$\Rightarrow$ lokales Minimum in $(\alpha,-\alpha)$

Falls $\alpha < 0$:

$\Rightarrow 6\alpha < 0 \quad \Rightarrow$ Hessematrix negativ definit

$\Rightarrow$ lokales Maximum in $(\alpha,-\alpha)$.

$\blacksquare$

Name: ..........................................................................................

**Aufgabe 7 (8 Punkte)**
Überprüfen Sie mittels zweier grundsätzlich verschiedener Strategien, ob die durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) - x & \text{falls } x \leqslant 0 \\ x^3 \cdot \cos(\frac{1}{x}) + 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ~~stetig~~ differenzierbar ist.

Es genügt, die Anschlussstelle $x=0$ zu betrachten. An allen anderen Stellen ist $f$ stetig diff'bar als Komposition stetig diff'barer Funktionen.

Strategie I (Bilde $f'$ und prüfe stetige Ergänzbarkeit)

Zunächst ist zu zeigen, dass $f$ in $x=0$ stetig ist (sonst wäre $f$ dort sicher nicht differenzierbar).

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = e^0 - 0 = 1 \\ \lim\limits_{x \searrow 0} x^3 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{beschränkt}} + 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ist stetig in } x=0$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{für } x < 0 \\ 3x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \nearrow 0} e^x - 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \searrow 0} 3x^2 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{beschränkt}} + x \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f' \text{ ist stetig} \\ \text{ergänzbar} \\ \text{durch } f'(0) = 0 \end{array}$$

Strategie II (Differenzenquotient)

Prüfe, ob gilt: $\lim\limits_{h \searrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{h^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{h}\right) + 1 - (e^0 - 0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} h^2 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0$$

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{e^h - h - (e^0 - 0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{e^h - 1}{h} - 1 \underset{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{h \nearrow 0} \frac{e^h}{1} - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ f ist diff'bar

Streng genommen müsste man bei der Bildung des Differenzenquotienten alle Nullfolgen betrachten, also auch solche, deren Folgenglieder wechselnde Vorzeichen haben. Durch Betrachtung entsprechender Teilfolgen solcher Folgen lassen sich diese aber grundsätzlich auf einen der beiden oben betrachteten Fälle zurückführen.

Name: ..........................................................................

**Aufgabe 8 (8 Punkte)**

Bestimmen Sie für folgendes Anfangswertproblem die Lösung und ihr maximales Existenzintervall:

$$y' = -\sin(x)\frac{1+y^2}{y} \text{ auf } \mathbb{R}\times(0,\infty), \quad y(0)=1$$

- Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen: $y' = f(x)g(y)$ mit

$$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -\sin(x), \quad g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ y\mapsto \frac{1+y^2}{y}.$$

- Wir gehen wie in der Vorlesung besprochen vor:

$$F: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto F(x) := \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x -\sin(t)\,dt = \cos(x)-1.$$

$$G: (0,\infty)\to\mathbb{R},\ y\mapsto G(y) := \int_1^y \frac{1}{g(t)}\,dt = \int_1^y \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^y \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|1+t^2|)\Big|_1^y = \frac{1}{2}\left(\ln(1+y^2)-\ln(2)\right).$$

- Da $G$ offenbar streng monoton wachsend ist, ist

$$G((0,\infty)) = \left(-\frac{1}{2}\ln(2),\ \infty\right) \subset \mathbb{R}.$$

Wir suchen $J\subset\mathbb{R}$ maximal mit $F(J)\subset\left(-\frac{1}{2}\ln(2),\ \infty\right)$, $0\in J$.

Es ist $F(J)\subset(-2,0)$ $\forall J\subset\mathbb{R}$ und wegen $\exp(x)>x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ist $\ln(x)<x$ $\forall x\in(0,\infty)$ also:

$$0 > -\frac{1}{2}\ln(2) > -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$$

Wegen der Symmetrie von $F$ ist also

$$J := \left(-\arccos\left(-\tfrac{1}{2}\ln(2)+1\right),\ \arccos\left(-\tfrac{1}{2}\ln(2)+1\right)\right) \subset \mathbb{R}$$

das maximale Intervall in $\mathbb{R}$ mit $0 \in J$ und $F(J) \subset G((0,\infty))$.

- Nach Vorlesung existiert nun genau eine Lösung

$$\varphi : J \to \mathbb{R}$$

des Anfangswertproblems auf $J$ und diese genügt der Gleichung

$$G(\varphi(x)) = F(x) \qquad \forall x \in J$$

d.h.

$$\tfrac{1}{2}\left(\ln(1+\varphi(x)^2) - \ln(2)\right) = \cos(x) - 1 \qquad \forall x \in J$$

$$\Rightarrow \ln(1+\varphi(x)^2) - \ln(2) = 2(\cos(x)-1) \qquad \forall x \in J$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}(1+\varphi(x)^2) = \exp(2(\cos(x)-1)) \qquad \forall x \in J$$

$$\Rightarrow \varphi(x)^2 = 2\exp(2(\cos(x)-1)) - 1 \qquad \forall x \in J$$

Wegen $\varphi(0) = 1$ müssen wir $+\sqrt{\cdot}$ auswählen.

$$\Rightarrow \varphi(x) = +\sqrt{2\exp(2(\cos(x)-1))-1} \quad \text{auf } J$$

ist die gesuchte Lösung mit ihrem maximalen Existenzintervall. $\blacksquare$