Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Wintersemester 2012/2013

L

Klausur zur Analysis II

Samstag, den 09.02.2013, 09:15–12:00 Uhr,
Hörsäle 00/0030 und +1/0020, Hörsaalgebäude Biegenstraße

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 56 Punkte erwartet, d.h. 56 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
max. Punkte	8	8	8	8	8	8	8	8	64
erreichte Punkte									

Name: ....

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist entweder offen oder abgeschlossen.

   wahr ☐ *falsch* ☐

2. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Kurven $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine stetige Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Folge der Bogenlängen $(L(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $L(f)$.

   wahr ☐ *falsch* ☐

3. Ist (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge, dann ist jede stetige Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt.

   wahr ☐ *falsch* ☐

4. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, dann gilt für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

   wahr ☐ *falsch* ☐

5. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, dann existieren in x alle partiellen Ableitungen aller Komponentenfunktionen f_i von f.

   wahr ☐ *falsch* ☐

6. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $x \in \mathbb{R}^n$ sei ein lokales Minimum von f. Dann ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und $\operatorname{Hess} f(x)$ positiv definit.

   wahr ☐ *falsch* ☐

7. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist der Mittelwert aller Steigungen von f auf $[a, b]$ gleich der Sekantensteigung durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

   wahr ☐ *falsch* ☐

8. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung. Dann ist das Anfangswertproblem $y' = f(t, y)$ mit $y(a) = b$ für jeden Punkt $(a, b) \in U$ auf einer kleinen Umgebung um a eindeutig lösbar.

   wahr ☐ *falsch* ☐

Name: ....

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und

$$d' : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben durch

$$d'(p, q) = \frac{d(p, q)}{1 + d(p, q)}.$$

Zeigen Sie, dass (M, d') ebenfalls ein metrischer Raum ist.

Name: ....

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume sowie $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ zwei stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$V := \{p \in X \mid f(p) = g(p)\} \subset X$$

abgeschlossen ist.

Name: ....

Aufgabe 4 (2+3+3=8 Punkte)

In der Schule approximiert man den Inhalt der Fläche unterhalb einer positiven Funktion f in einem Intervall $I = [a, b]$ oftmals durch äquidistante Zerlegung des Intervalls in n Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ gleicher Breite (mit $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, ..., n$) sowie der nachfolgenden Berechnung des Flächeninhalts unterhalb des Polygonzuges P, welcher die Punkte $(x_k, f(x_k))$ miteinander verbindet. Dieser Flächeninhalt sei im Folgenden mit $P_n(f)$ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$P_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

(ii) Man könnte in dem Bemühen um Einfachheit versucht sein, aus dem beschriebenen Verfahren folgende Definition für das bestimmte Integral abzuleiten:

$$\mathop{\int\!\!\!\!\!\!=}\nolimits_a^b f \ := \lim_{n \to \infty} P_n(f)$$

Begründen Sie, warum dieses Integral − nennen wir es das *p-äqui-Integral* − für die Klasse der auf $[a, b]$ stetigen Funktionen mit dem Riemann-Integral übereinstimmt.

(iii) Leider hat das *p-äqui-Integral* einige "unerwünschte" Eigenschaften. Beispielweise ist es nicht *intervall-additiv*. Weisen Sie dies durch explizite Rechnung nach für die auf dem Intervall $[0, 1]$ betrachtete Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Name: ....

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(\|x\|_2)$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar ist und berechnen Sie das totale Differential.

Name: ....

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ *alle* kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder kein lokales Extremum handelt.

Name: ....

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Überprüfen Sie mittels zweier grundsätzlich verschiedener Strategien, ob die durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) - x & \text{falls } x \leqslant 0 \\ x^3 \cdot \cos(\frac{1}{x}) + 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

Name: ....

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Bestimmen Sie für folgendes Anfangswertproblem die Lösung und ihr maximales Existenzintervall:

$$y' = -\sin(x) \cdot \frac{1+y^2}{y} \text{ auf } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad y(0) = 1$$

Name: ....

Zusatzblatt 1

Name: ....

Zusatzblatt 2