Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 1 –

Abgabe: Freitag, den 26.10.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 1.1. (10 Punkte)
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit

$$f(x) = g(x)$$

für alle $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Zeige, dass dann folgende Gleichung gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Aufgabe 1.2. (10 Punkte)

(i) Berechne die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_1^2 x^3 \ln(x)\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^\pi \exp(x)\sin(x)\,dx \qquad \text{(c)} \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx$$

(ii) Überprüfe, ob das folgende uneigentliche Integral existiert und berechne, falls es existiert, den Wert:

$$\int_0^\infty x\exp(-x^2)\,dx$$

Aufgabe 1.3. (10 Punkte)
Es seien reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sowie $b_1, \ldots, b_m$ gegeben. Zeige mit Hilfe des Riemann-Integrals, dass es ein $x \in [0, \pi]$ gibt, so dass

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin(2kx) = \sum_{k=1}^m b_k \cos(kx)$$

gilt.

Hinweis: Formuliere die behauptete Gleichung zunächst als Aussage über die Nullstellen einer geeigneten Funktion.

Aufgabe 1.4. (10 Punkte)

(i) Es seien für $n \in \mathbb{N}$ beschränkte Funktionen $f_n : K \to \mathbb{R}$ auf einer Menge $K \subset \mathbb{R}$ gegeben, welche auf K gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : K \to \mathbb{R}$ konvergieren. Zeige, dass dann auch f beschränkt ist.

(ii) Untersuche die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz und gib die Grenzfunktionen an:

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(-n(x^2+1))$
(b) $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$
(c) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1+|nx|}$