Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 10 –

Abgabe: Freitag, den 18.01.2013, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 10.1. (10 Punkte)
Berechne die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(2,2)$ bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung.

Aufgabe 10.2. (10 Punkte)
Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in U$ und alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$tx + (1-t)y \in U$$

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex, dann nennen wir eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ *konvex*, falls für alle $x, y \in U$ und alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Zeige durch Reduktion auf den eindimensionalen Fall, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist konvex.

(ii) $(\operatorname{Hess} f)(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in U$.

Aufgabe 10.3. (10 Punkte)

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite (bzw. negativ definite) Matrix. Zeige: A ist invertierbar und A^{-1} ist ebenfalls positiv definit (bzw. negativ definit).

(ii) Gib ein Beispiel für eine symmetrische, indefinite Matrix an, welche nicht invertierbar ist. Kann es solche Matrizen in $\mathbb{R}^{1\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{2\times 2}$ geben?

(iii) Es sei eine symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gegeben. Zeige, dass die Vorzeichen von $\det A$ und a die Definitheit der Matrix A gemäß folgender Tabelle implizieren:

	$\det A > 0$	$\det A = 0$	$\det A < 0$
$a > 0$	A positiv definit	A positiv semidefinit	A indefinit
$a < 0$	A negativ definit	A negativ semidefinit	A indefinit

Diskutiere außerdem den Fall $a = 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.4. (10 Punkte)

(i) Bestimme in Abhängigkeit von $\mu > 0$ alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \exp(xy) + x^2 + \mu y^2.$$

(ii) Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Zeige:

(a) g besitzt in $(0, 0)$ kein lokales Minimum.

(b) Für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ besitzt die Funktion

$$g_{(a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto g(ta, tb)$$

in 0 ein striktes lokales Minimum.

Das Team der Analysis II wünscht euch schöne Winterferien und ein gutes Jahr 2013!