Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 11 –

Abgabe: Freitag, den 25.01.2013, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 11.1. (10 Punkte)
Zeige, dass $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ existieren, so dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x) + y^2 + z &= 0 \\ x^2 + y\exp(z) &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ genau eine Lösung

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} \in U_\delta(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

besitzt.

Aufgabe 11.2. (10 Punkte)
Zeige, dass die Gleichung

$$z^3 + z + xy = 1$$

für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x, y)$ besitzt und dass die dadurch gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Bestimme die lokalen Extrema von g.

Aufgabe 11.3. (10 Punkte)

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \exp(x)\cos(y) \\ \exp(x)\sin(y) \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass f lokal um jeden Punkt ein Diffeomorphismus ist, d.h. dass es zu jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ offene Umgebungen U von p sowie V von $f(p)$ gibt, so dass

$$f|_U : U \longrightarrow V$$

ein Diffeomorphismus ist. Ist f selbst ein Diffeomorphismus?

(ii) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine einmal stetig partiell differenzierbare Abbildung, so dass $Df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Zeige: Ist $V \subset U$ offen dann ist auch $f(V) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Aufgabe 11.4. (10 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Ein kritischer Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ von f heißt *nichtausgeartet*, falls

$$\det(\operatorname{Hess} f(x)) \neq 0$$

gilt. Zeige: Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein nichtausgearteter kritischer Punkt von f, dann gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von x in der es außer x keine weiteren kritischen Punkte von f gibt.