

Übungen zur Analysis II

– Blatt 12 –

Abgabe: Freitag, den 01.02.2013, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 12.1. (10 Punkte)

Für eine reelle Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ sei auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne mit Hilfe des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens eine Lösung.

Aufgabe 12.2. (10 Punkte)

- (i) Berechne für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems auf einer kleinen Umgebung um x_0 :

$$y' = \cos(x) \cdot \exp(y) \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0$$

Bestimme im Fall $y_0 = 0$ das maximale Existenzintervall dieser Lösung in Abhängigkeit von x_0 explizit.

- (ii) Bestimme ein Lösungs-Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 12.3. (10 Punkte)

Für $p \in \mathbb{R}$ heißt die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \text{auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

Besselsche Differentialgleichung der Ordnung p .

- (i) Bestimme ein Lösungs-Fundamentalsystem der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung $p = \frac{1}{2}$. Verwende hierfür den Ansatz $z = \sqrt{xy}$.
- (ii) Für $p \in \mathbb{R}$ seien Abbildungen

$$T_p, S_p, B_p : \mathcal{C}^\infty((0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty((0, \infty), \mathbb{R})$$

definiert durch

$$(T_p f)(x) = f'(x) + \frac{p}{x}f(x)$$

$$(S_p f)(x) = -f'(x) + \frac{p}{x}f(x)$$

$$(B_p f)(x) = f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)f(x).$$

Zeige, dass diese Abbildungen linear sind und folgende Identitäten erfüllen:

Bitte wenden!

- (1) $T_{p+1} \circ S_p = \text{id} - B_p$
- (2) $S_{p-1} \circ T_p = \text{id} - B_p$
- (3) $T_p \circ B_p = B_{p-1} \circ T_p$
- (4) $S_p \circ B_p = B_{p+1} \circ S_p$

(iii) Es sei $V_p = \text{kern}(B_p)$ der Vektorraum der *Zylinderfunktionen* der Ordnung p . Zeige:

- (1) Es ist $T_p(V_p) \subset V_{p-1}$ sowie $S_p(V_p) \subset V_{p+1}$.
- (2) Die Abbildungen $S_p : V_p \rightarrow V_{p+1}$ und $T_{p+1} : V_{p+1} \rightarrow V_p$ sind Isomorphismen und invers zueinander.

(iv) Verwende die Resultate aus (i)-(iii) um ein Lösungs-Fundamentalsystem der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung $p = \frac{3}{2}$ zu berechnen.

Aufgabe 12.4. (10 Punkte)

Ein Student hat sich eine gewisse Menge an Wissen etwa zur Analysis eingeprägt. Mit der Zeit wird er einiges davon vergessen. Wir bezeichnen den Prozentsatz des Stoffes den er t Zeiteinheiten nach dessen voller Meisterung noch im Gedächtnis hat mit $p(t)$. Es ist also $p(0) = 100$. Optimistischerweise wird man annehmen dürfen, dass er einen gewissen Prozentsatz b mit $0 < b < 100$ des Stoffes nie vergisst und ferner wird man den Ansatz wagen, dass zur Zeit t die Vergessensrate $p'(t)$ proportional zu dem Prozentsatz des noch zu vergessenden Stoffes $p(t) - b$ ist.

Formuliere dieses Modell der Gedächtnisleistung des Studenten in Form eines Anfangswertproblems, bestimme die Lösung und skizziere sie für eine beliebige Wahl der auftretenden Parameter.