Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 2 –

Abgabe: Freitag, den 02.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 2.1. (10 Punkte)

(i) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbare Funktionen und

$$T_2[f,1](x) = -1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 \quad \text{sowie} \quad T_2[g,0](x) = 1 - x + 5x^2$$

die Taylorpolynome der Ordnung 2 von f bzw. g um die Entwicklungspunkte 1 bzw. 0. Bestimme das Taylorpolynom der Ordnung 2 der Funktion $h(x) = f(g(x))$ um den Entwicklungspunkt 0.

(ii) Berechne die Taylorreihe der Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt π und zeige mit der Lagrangeschen Form des Restgliedes, dass diese auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Funktion konvergiert. Zeichne die Graphen des Cosinus und der ersten 5 Taylorpolynome im Intervall $[0, 7]$.

Aufgabe 2.2. (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass f genau dann ein Polynom vom Grad $\leqslant n$ ist, wenn f mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar ist und $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2.3. (10 Punkte)
Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn der Graph von f in jedem Punkt aus (a, b) über seiner Tangente liegt, d.h., wenn

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y - x)$$

für alle $x, y \in (a, b)$ gilt.

Aufgabe 2.4. (10 Punkte)

(i) Sei M eine nichtleere Menge. Zeige, dass durch

$$d_d(p,q) := \begin{cases} 0 & \text{falls } p = q \\ 1 & \text{falls } p \neq q \end{cases}$$

eine Metrik auf M definiert wird, die *diskrete Metrik*.

(ii) Zeige, dass auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$d_f(x,y) := \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{falls } x, y \text{ linear unabhängig} \end{cases}$$

wobei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm bezeichne, eine Metrik definiert wird, die *French-Railroad-Metrik*. Beschreibe, wie durch diese Metrik im Gegensatz zur von der euklidischen Norm induzierten Metrik, Abstände gemessen werden.