Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 3 –

Abgabe: Freitag, den 09.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 3.1. (10 Punkte)

(i) Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_f)$, wobei d_f die French-Railroad-Metrik aus Aufgabe 2.4. bezeichne. Bestimme die ε-Umgebungen von Punkten $p \in \mathbb{R}^2$ explizit und skizziere die verschiedenen Fälle.

(ii) Beschreibe die folgenden Teilmengen des metrischen Raums $(\mathbb{R}^2, d_d)$, wobei d_d die diskrete Metrik aus Aufgabe 2.4. bezeichne, explizit:

(a) Alle ε-Umgebungen von Punkten $p \in \mathbb{R}^2$.

(b) Alle Umgebungen von Punkten $p \in \mathbb{R}^2$.

(c) Alle offenen und abgeschlossenen Mengen.

Aufgabe 3.2. (10 Punkte)
Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$, wobei d die von der euklidischen Norm induzierte Metrik sei.

(i) Zeige, dass es in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(p)$ mit $p \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein Element aus $\mathbb{Q}^n$ gibt, d.h.

$$\mathbb{Q}^n \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset.$$

(ii) Zeige, dass jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ als Vereinigung *abzählbar* vieler offener ε-Umgebungen geschrieben werden kann, d.h. in der Form

$$M = \bigcup_{i \in I} U_{\varepsilon_i}(x_i)$$

mit einer abzählbaren Menge I und geeigneten $\varepsilon_i > 0$ sowie $x_i \in M$ für $i \in I$.

Anleitung: Konstruiere zunächst irgendeine Überdeckung von M durch ε-Umgebungen und ersetze die Umgebungen anschließend durch solche mit Mittelpunkten aus $\mathbb{Q}^n$ sowie rationalen Radien.

Aufgabe 3.3. (10 Punkte)
Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $(M \times M, d')$ der (metrische) Produktraum mit

$$d'\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \max\{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}.$$

(i) Zeige, dass für alle $x \in M$ die Menge $\{x\} \subset M$ abgeschlossen ist.

(ii) Zeige, dass die Diagonale

$$\Delta := \{(x, x) \in M \times M \mid x \in M\} \subset M \times M$$

abgeschlossen ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4. (10 Punkte)
Sei p eine Primzahl und $|\cdot|_p$ der p-adische Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ (vgl. Aufgabe I.4.1.). Wir definieren $d_p : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$d_p\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) := \max\{|x_1 - y_1|_p,\, |x_2 - y_2|_p\}$$

(i) Zeige, dass d_p eine Metrik auf $\mathbb{Q}^2$ ist, welche für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}^2$ die Ungleichung

$$d_p(x, y) \leqslant \max\{d_p(x, z),\, d_p(z, y)\}$$

erfüllt.

(ii) Zeige, dass der metrische Raum $(\mathbb{Q}^2, d_p)$ die folgenden merkwürdigen Eigenschaften aufweist:

(a) Jeder Punkt aus einer Kreisscheibe ist ein Mittelpunkt dieser Kreisscheibe, d.h. ist für einen Punkt $x \in \mathbb{Q}^2$ und einen Radius $r > 0$

$$B(x, r) = \{z \in \mathbb{Q}^2 \mid d_p(z, x) < r\}$$

die Kreisscheibe mit Radius r um x, dann gilt:

$$B(y, r) = B(x, r) \qquad \text{für alle } y \in B(x, r)$$

(b) In jedem Dreieck gibt es mindestens zwei Seiten gleicher Länge, d.h. sind $x, y, z \in \mathbb{Q}^2$ gegeben, dann gilt mindestens eine der Gleichungen

$$d_p(x, y) = d_p(x, z) \qquad d_p(x, y) = d_p(y, z) \qquad d_p(x, z) = d_p(y, z).$$

(c) Jede Kreisscheibe $B(x, r)$ mit Radius $r > 0$ um $x \in \mathbb{Q}^2$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.