

Übungen zur Analysis II

– Blatt 4 –

Abgabe: Freitag, den 16.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 4.1. (10 Punkte)

- (i) Es sei X eine Menge, welche nicht endlich ist und

$$\mathfrak{X} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Zeige, dass $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X ist, die *Topologie der endlichen Komplemente*.

- (ii) Bestimme alle Topologien, die es auf einer dreielementigen Menge gibt.

Aufgabe 4.2. (10 Punkte)

Es sei $\mathbb{R}^2$ mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie ausgestattet und

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Bestimme die Mengen $\overline{A}$, A° und ∂A explizit.

Aufgabe 4.3. (10 Punkte)

Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum.

- (i) Beweise die folgenden Formeln für eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X :

$$\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^\circ, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^\circ \subset \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$$

Gib Beispiele an, in denen die auftretenden Mengeninklusionen echt sind.

- (ii) Zeige dass eine Menge $A \subset X$ genau dann offen und abgeschlossen ist, wenn $\partial A = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 4.4. (10 Punkte)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass nicht jede Topologie von einer Metrik induziert wird. Dazu sei $\mathbb{R}$ mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie ausgestattet und $X := \mathbb{R} \cup \{0'\}$, wobei $0'$ ein Objekt ist, welches nicht in $\mathbb{R}$ liegt. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$B(\varepsilon) := (-\varepsilon, 0) \cup \{0'\} \cup (0, \varepsilon)$$

und damit:

$$\mathfrak{X} := \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ offen in } \mathbb{R}\} \cup \{U \subset X \mid 0' \in U, U \cap \mathbb{R} \text{ offen in } \mathbb{R}, B(\varepsilon) \subset U \text{ für ein } \varepsilon > 0\}$$

- (i) Zeige, dass $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum ist. Fertige eine Skizze des Raumes und eine kurze Beschreibung der Topologie an.
- (ii) Zeige, dass es keine Metrik d auf X gibt, so dass die bezüglich der Metrik offenen Teilmengen von X genau die Mengen aus $\mathfrak{X}$ sind.