

Übungen zur Analysis II

– Blatt 5 –

Abgabe: Freitag, den 23.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 5.1. (10 Punkte)

Seien $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$ topologische Räume. Wir nennen eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig im Punkt $x \in X$, falls es für jede Umgebung $U \subset Y$ von $f(x)$ eine Umgebung $V \subset X$ von x gibt, so dass $f(V) \subset U$ gilt.

- (i) Zeige, dass eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ genau dann stetig ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
- (ii) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:
 - (a) f ist in $x \in X$ stetig.
 - (b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$ gilt.
 - (c) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X die gegen x konvergiert, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

Aufgabe 5.2. (10 Punkte)

Der Vektorraum $\mathbb{R}^{n \times n}$ sei mit der von der Norm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|(a_{ij})_{i,j}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

induzierten Metrik ausgestattet (die Normeigenschaften müssen *nicht* nachgerechnet werden). Zeige, dass die Menge $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ der invertierbaren Matrizen offen ist.

Hinweis: Verwende die Leibniz-Darstellung der Determinantenfunktion $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ um zu zeigen, dass diese stetig ist.

Aufgabe 5.3. (10 Punkte)

Auf dem Vektorraum $\mathcal{C}^1([a, b])$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$ definieren wir:

$$\|\cdot\| : \mathcal{C}^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Zeige, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist und dass die Abbildung

$$\mathcal{C}^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

bezüglich $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{C}^1([a, b])$ sowie

$$\mathcal{C}^2([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}^1([a, b]), \quad f \mapsto f'$$

bezüglich $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{C}^2([a, b])$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathcal{C}^1([a, b])$ stetig ist. Sind die Abbildungen auch stetig, wenn $\|\cdot\|$ jeweils durch die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ersetzt wird?

Bitte wenden!

Aufgabe 5.4. (10 Punkte)

In dieser Aufgabe soll eine *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von $\mathbb{R}$ konstruiert werden. Dazu betrachten wir den Einheitskreis

$$S^1 := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Relativtopologie und definieren eine Abbildung $\psi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ indem wir $x \in \mathbb{R}$ auf den Schnittpunkt der Geraden durch $(x, 0)$ und $(0, 1)$ mit S^1 abbilden.

- (i) Berechne eine explizite Formel für die Abbildung ψ und zeige, dass ψ ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung: Damit kann $\mathbb{R}$ vermöge ψ als topologischer Raum mit $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ identifiziert, d.h. als Unterraum des kompakten Raums S^1 betrachtet werden.

- (ii) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$$

für eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$, dann ist $f \circ \psi^{-1} : S^1 \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass auch die Fortsetzung

$$\hat{f} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \begin{cases} f \circ \psi^{-1}(v) & \text{falls } v \neq (0, 1) \\ c & \text{falls } v = (0, 1) \end{cases}$$

stetig ist und erläutere die Anschauung zu dieser Beobachtung.